



# Distributions alpha-stable pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placés dans un environnement maritime

Anthony Fiche

## ► To cite this version:

Anthony Fiche. Distributions alpha-stable pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placés dans un environnement maritime. Autre. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2012. Français. NNT : 2012BRES0038 . tel-00835073

**HAL Id: tel-00835073**

**<https://theses.hal.science/tel-00835073>**

Submitted on 18 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



université de bretagne  
occidentale



## THÈSE / UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

*sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne*

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

*Mention : Electronique, Traitement du signal*

École Doctorale: Santé, Information, Communication,  
Mathématique, Matière (ED SICMA 373)

présentée par

**Anthony Fiche**

Préparée au Lab-STICC, UMR CNRS 6285,  
ENSTA Bretagne, Brest.

Distributions  $\alpha$ -stables pour la  
caractérisation de phénomènes  
aléatoires observés par des  
capteurs placés dans un  
environnement maritime

**Thèse soutenue le (19/11/2012)**

devant le jury composé de :

**Christian Brosseau**, *président du jury*

Professeur, Université de Bretagne Occidentale, Brest

**Marc Acheroy**, *rapporteur*

Professeur Émérite, RMA - B - 1030 Brussels, Belgium

**Salah Bourennane**, *rapporteur*

Professeur, École Centrale de Marseille, Marseille 03ème

**Basel Solaiman**, *examineur*

Professeur, Télécom Bretagne, Brest

**Ali Khenchaf**, *examineur, directeur de thèse*

Professeur, ENSTA Bretagne, Brest

**Arnaud Martin**, *examineur, co-encadrant*

Professeur, Université de Rennes 1, Lannion

**Jean-Christophe Cexus**, *examineur, co-encadrant*

Enseignant-chercheur, ENSTA-Bretagne, Brest

**Christian Cochin**, *invité*

Expert DGA, DGA-MI, Bruz

**Véronique Serfaty**, *invitée*

Responsable domaine scientifique I2R, DGA-MRIS, Bagneux



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein de l'équipe Radar, Électromagnétisme et Télédétection, qui a intégré le Lab-STICC depuis le 1 janvier 2012, sous la direction du professeur Ali Khenchaf et hébergé par l'ENSTA Bretagne (École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ex ENSIETA)), à Brest.

Je tiens tout d'abord à remercier Ali Khenchaf de m'avoir accueilli au sein du laboratoire et d'avoir dirigé cette thèse. Je le remercie pour m'avoir proposé ce sujet de thèse. Je le remercie pour sa très grande patience et confiance à mon égard, ainsi que ses conseils avisés qui m'ont permis de réaliser des travaux dans de bonnes conditions. Je remercie également Arnaud Martin et Jean-Christophe Cexus d'avoir co-encadré ma thèse, pour leurs conseils scientifiques et pratiques.

J'exprime ma reconnaissance aux membres du jury d'avoir bien voulu évaluer mes travaux sous la présidence de Christian Brosseau. Remerciement spécial à March Acheroy et Salah Bournane pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Basel Solaiman, Christian Cochin et Véronique Serfaty ont également accepté de faire partie de mon jury et je leur en suis très reconnaissant.

Le cadre de travail à l'ENSTA Bretagne ayant été agréable, je tiens donc à remercier l'ensemble du personnel de l'école et plus particulièrement le personnel de la médiatèque ainsi que les secrétaires du pôle STIC, Annick Billon-Coat et Michèle Hofmann, pour leurs aides précieuses. Je remercie aussi les responsables de matière qui m'ont permis de donner des travaux dirigés aux élèves de cycle ingénieur et ainsi de prendre plus d'assurance à l'oral. Je remercie également les doctorants qui ont partagé mon bureau durant ces trois années (Cédric, Pierre-Emmanuel, Coralie et Lassaad) ainsi que les autres doctorants de l'ENSTA Bretagne que j'ai croisé (Sam, Refzul, Slah, Guillaume, Jérôme, Florian, Seif, Ahmed,...).

Mes remerciements vont également à mes amis du crew MDO pour les soirées et les moments de détente passer à leurs côtés. Je remercie aussi mes collègues de football de l'Avenir de Guiscriff de m'avoir supporté (et oui je suis un râleur) mais surtout pour les inoubliables moments de rigolades partagés ensemble que ce soit dans la victoire ou dans la défaite.

Enfin, je ne peux terminer sans remercier ma famille pour leur soutien et leurs encouragements durant mes années d'études. Je remercie mes parents pour les sacrifices réalisés : sans eux je ne serais jamais arrivé là où je suis.





# Table des matières

Liste des symboles et notations	ix
Liste des acronymes	xvii
Listes des figures	xix
Listes des tableaux	xxiii
Introduction générale	1
<b>1 Systèmes d’acquisition et outils de traitement des données</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Systèmes d’acquisition . . . . .	9
1.2.1 Systèmes acoustiques . . . . .	9
1.2.1.1 Historique . . . . .	9
1.2.1.2 Systèmes et technologies de traitement . . . . .	10
1.2.2 Systèmes micro-ondes . . . . .	11
1.2.2.1 Historique . . . . .	11
1.2.2.2 Systèmes et technologies de traitement . . . . .	11
1.2.2.3 Formalisme électromagnétique . . . . .	12
1.2.2.3.a Équations de Maxwell . . . . .	12
1.2.2.3.b Polarisation de l’onde . . . . .	13
1.2.2.3.c Bilan de liaison . . . . .	14
1.3 Théorie des probabilités . . . . .	15
1.3.1 Définitions . . . . .	15
1.3.2 Quelques lois continues . . . . .	18
1.3.2.1 Loi Gaussienne . . . . .	18
1.3.2.2 Loi de Weibull . . . . .	18
1.3.2.3 Loi de Rayleigh . . . . .	19
1.3.2.4 Loi exponentielle . . . . .	20
1.3.2.5 Loi gamma . . . . .	20
1.3.2.6 Loi $\mathcal{K}$ . . . . .	22
1.3.2.7 Loi $\chi^2$ . . . . .	24
1.3.3 Théorèmes de convergence . . . . .	25
1.4 Tests statistiques . . . . .	26
1.4.1 Test du $\chi^2$ . . . . .	26
1.4.2 Test de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	27
1.5 Conclusion . . . . .	27

<b>2</b>	<b>Distributions <math>\alpha</math>-stables : définitions et estimation</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	30
2.2	Distributions $\alpha$ -stables unidimensionnelles . . . . .	32
2.2.1	Définitions . . . . .	32
2.2.1.1	Définition de la stabilité . . . . .	32
2.2.1.2	Densité de probabilité et fonction de répartition . . . . .	33
2.2.1.3	Simulation d'une variable aléatoire stable . . . . .	36
2.2.2	Estimation des paramètres . . . . .	36
2.2.2.1	Méthodes fondées sur les quantiles . . . . .	37
2.2.2.1.a	Méthode de Fama-Roll . . . . .	37
2.2.2.1.b	Méthode de McCulloch . . . . .	38
2.2.2.2	Méthodes fondées sur la fonction caractéristique . . . . .	38
2.2.2.2.a	Méthode de Press . . . . .	39
2.2.2.2.b	Méthode de Koutrouvelis . . . . .	40
2.2.2.3	Méthode par maximum de vraisemblance . . . . .	40
2.2.2.4	Méthode par moindres carrés . . . . .	44
2.2.2.5	Comparaison entre les différents estimateurs . . . . .	45
2.3	Distributions $\alpha$ -stables multidimensionnelles . . . . .	50
2.3.1	Définition . . . . .	50
2.3.1.1	Définition de la stabilité . . . . .	50
2.3.1.2	Densité de probabilité . . . . .	51
2.3.1.3	Simulation de vecteurs aléatoires stables . . . . .	51
2.3.2	Estimation des paramètres . . . . .	51
2.3.2.0.a	Méthode de la fonction caractéristique . . . . .	51
2.3.2.0.b	Méthode de projection . . . . .	52
2.3.2.0.c	Application au cas bidimensionnel . . . . .	52
2.4	Conclusion . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Classification sédimentaire des fonds marins</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	58
3.2	Techniques de classification . . . . .	59
3.2.1	Méthodes classiques . . . . .	59
3.2.1.1	Méthode Bayésienne . . . . .	59
3.2.1.2	Méthode des $k$ plus proches voisins . . . . .	60
3.2.1.3	Réseau de neurones . . . . .	60
3.2.2	Théories de l'incertain . . . . .	62
3.2.2.1	Théorie des probabilités imprécises . . . . .	62
3.2.2.2	Théorie des possibilités . . . . .	62
3.2.2.3	Théorie des fonctions de croyance . . . . .	63
3.2.2.3.a	Cas discret . . . . .	64
3.2.2.3.b	Cas continu . . . . .	69
3.3	Classification suivant la théorie des fonctions de croyance . . . . .	76
3.3.1	Classification de données générées . . . . .	77
3.3.1.1	Cas Gaussien . . . . .	77
3.3.1.2	Cas $\alpha$ -stable . . . . .	79
3.3.2	Classification de données réelles . . . . .	84
3.3.2.1	Présentation des données . . . . .	84
3.3.2.2	Résultats numériques . . . . .	86
3.4	Conclusion . . . . .	94

---

---

<b>4</b>	<b>Caractérisation statistique du fouillis de mer</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	96
4.2	Description de la surface maritime . . . . .	97
4.2.1	Propriétés physiques de la surface maritime . . . . .	97
4.2.1.1	Température de surface de l'eau de mer . . . . .	98
4.2.1.2	Salinité de l'eau de mer . . . . .	98
4.2.1.3	Caractéristique électromagnétique . . . . .	98
4.2.1.4	Influence du vent . . . . .	100
4.2.2	Propriétés géométriques de la surface de mer . . . . .	102
4.2.2.1	Surface de mer à une dimension . . . . .	103
4.2.2.2	Distribution des hauteurs . . . . .	103
4.2.2.3	Distributions des pentes . . . . .	104
4.2.2.4	Fonction d'auto-corrélation . . . . .	105
4.2.2.5	Modélisation spectrale . . . . .	105
4.2.2.5.a	Relation de dispersion . . . . .	105
4.2.2.5.b	Lien entre la fonction d'élévation et spectre de mer . . . . .	106
4.2.2.5.c	Les spectres omnidirectionnels . . . . .	107
4.2.2.5.d	Les fonctions angulaires . . . . .	111
4.2.3	Spectre de mer et vagues . . . . .	113
4.3	Modèles asymptotiques de diffusion électromagnétique . . . . .	116
4.3.1	Approximation de Kirchhoff . . . . .	118
4.3.2	Méthode des petites perturbations . . . . .	119
4.3.3	Optique physique . . . . .	120
4.4	Simulation et analyse statistique . . . . .	124
4.4.1	Méthodologie et chaîne de traitement . . . . .	124
4.4.2	Interprétation des résultats et choix du modèle . . . . .	126
4.4.2.1	Comparaison des distributions : Weibull, $\mathcal{K}$ et $\alpha$ -stable . . . . .	126
4.4.2.2	Influence des paramètres des distributions $\alpha$ -stables . . . . .	128
4.4.2.2.a	Paramètre $\alpha$ . . . . .	130
4.4.2.2.b	Paramètre $\beta$ . . . . .	130
4.4.2.2.c	Paramètre $\gamma$ . . . . .	131
4.4.2.2.d	Paramètre $\delta$ . . . . .	131
4.4.2.3	Détection . . . . .	132
4.5	Conclusion . . . . .	134
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>139</b>
4.6	Perspectives . . . . .	140
<b>A</b>	<b>Lien entre la loi <math>\mathcal{K}</math> composée et la loi <math>\mathcal{K}</math> généralisée</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Calcul de la densité de probabilité d'une distribution <math>\alpha</math>-stable</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Tables d'estimation</b>	<b>147</b>
C.1	Tables de McCulloch . . . . .	147
C.2	Tables de Koutrouvelis . . . . .	150
<b>D</b>	<b>Dérivées des densités de probabilité <math>\alpha</math>-stables</b>	<b>151</b>

---

<b>E Coefficients de diffusion</b>	<b>153</b>
E.1 Approximation de Kirchhoff . . . . .	153
E.2 Méthode des petites perturbations . . . . .	156
<b>Production scientifique</b>	<b>159</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>172</b>

# Liste des symboles

## Lettres grecques

$2^{\mathcal{C}}$	Ensemble des parties de $\mathcal{C}$
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire dans l'espace euclidien
$\alpha$	Exposant caractéristique d'une loi stable
$\alpha_m$	Constante de Philips-Kitaigorodskii
$\alpha_{cut}$	$\alpha$ -coupe
$\alpha_{PM}$	Constante de Philips
$\beta$	Paramètre d'asymétrie d'une loi stable
$\beta_{PM}$	Paramètre du spectre de Pierson-Moskowitz
$\delta_i$	Moyenne de la $i^{\text{ième}}$ composante d'un mélange de Gaussiennes
$\delta_{s_i}(\cdot)$	Mesure de Dirac en $s_i$
$\delta$	Paramètre de position d'une loi stable
$\delta$	Paramètre moyenne d'une loi normale univariée
$\Delta_x, \Delta_y$	Pas de discrétisation pour la surface maritime
$\emptyset$	Ensemble vide
$\epsilon$	Permittivité diélectrique du milieu
$\epsilon_0$	Constante diélectrique du vide
$\epsilon_r$	Permittivité électrique relative
$\epsilon_s$	Permittivité statique
$\epsilon_{r,\infty}$	Limite haute fréquence de $\epsilon_s$
$\gamma_i$	Poids de la $i^{\text{ième}}$ composante constituant une mesure spectrale
$\gamma$	Paramètre de dispersion d'une loi stable
$\gamma_{JW}$	Paramètre du facteur d'amélioration de JONSWAP
$\hat{\cdot}$	Estimateur d'un paramètre d'une loi
$\Im$	Partie imaginaire
$\iota$	Mesure de conflit entre les sources
$\kappa_0$	Constante de Von Kármán

$\lambda$	Nombre d'onde de l'onde électromagnétique
$\lambda_L$	Mesure de Lebesgues
$\lambda_W$	Paramètre d'échelle d'une loi de Weibull
$\mathbb{R}^d$	Ensemble des nombres réels à $n$ dimensions
$\mathcal{G}(\alpha_G, \beta_G)$	Loi gamma de paramètres $\alpha_G$ et $\beta_G$
$\mu$	Perméabilité magnétique du milieu
$\mu^\Omega$	Mesure crédale définie sur $2^\Omega$
$\mu_0$	Perméabilité relative du vide
$\mu_r$	Permittivité magnétique relative
$\nu_\alpha$	Valeurs pour estimer le paramètre $\alpha$ dans la table de McCulloch
$\nu_\beta$	Valeurs pour estimer le paramètre $\beta$ dans la table de McCulloch
$\nu$	Mode d'une densité de probabilité unimodale
$\Omega_0$	Inverse de l'âge des vagues caractérisant l'état de développement de la mer de vent
$\phi$	Direction d'une vague par rapport à la direction du vent
$\phi_i$	Angle générique formé par la direction du rayon émis et l'axe des abscisses du repère
$\phi_s$	Angle générique formé par la direction du rayon réfléchi et l'axe des abscisses du repère
$\phi_X$	Fonction caractéristique de la variable aléatoire $X$
$\Pi, N$	Mesure de possibilité et de nécessité
$\psi_1$	Fonction permettant d'estimer le paramètre $\alpha$ avec McCulloch
$\psi_2$	Fonction permettant d'estimer le paramètre $\beta$ avec McCulloch
$\psi_3$	Fonction utilisée lors de l'estimation du paramètre $\gamma$ avec McCulloch
$\psi_5$	Fonction utilisée lors de l'estimation du paramètre $\delta$ avec McCulloch
$\Re$	Partie réelle
$\rho$	Densité volumique de charge
$\rho(x)$	Fonction d'auto-corrélation
$\rho_{eau}$	Masse volumique de l'eau
$\sigma_i$	Écart-type de la $i^{\text{ième}}$ composante d'un mélange de Gaussiennes
$\sigma$	Paramètre écart-type d'une loi normale univariée
$\sigma_{pq}^s$	Coefficient de diffusion pour la polarisation p en émission et q en réception
$\sigma^s$	Mesure spectrale
$\sigma_c^2$	Variance dans la direction travers au vent
$\sigma_s$	Conductivité statique

---

$\sigma_u^2$	Variance des pentes dans la direction du vent
$\sigma_z$	Écart-type des hauteurs
$\sigma_{JW}$	Paramètre du spectre de JONSWAP
$\sigma_R$	Paramètre d'une loi de Rayleigh
$\tau$	Tension superficielle de l'eau de surface
$\tau_r$	Temps de relaxation
erf	Fonction erreur de Gauss
$\Theta$	Cadre de discernement générique
$\theta_i$	Angle d'incidence générique
$\theta_s$	Angle de réception générique
$v$	Fonction vérifiant $Betf(v(b)) = Betf(b)$
$\vartheta$	Facteur d'affaiblissement d'une fonction de masse
$\vartheta_i$	Angle de la $i^{\text{ième}}$ composante constituant la mesure spectrale
$\Xi^l$	Estimation de la variable $\Xi$ lors de la $l^{\text{ième}}$ itération
$\vartheta_m^\Theta$	Fonction de masse affaiblie s'exprimant sur $2^\Theta$
$I_{\alpha_{cut}}$	Intervalle $I$ défini par l' $\alpha_{cut}$
$k_m$	Nombre d'onde du pic gravité-capillarité
$M$	Nombre de fonctions de masse
$x, y$ et $t$	Variables d'intégration.
$\delta$	Vecteur de position pour une loi stable
$\mathbf{X}$	Vecteur aléatoire stable
$\delta$	Paramètre moyenne d'une loi normale multivariée
$\Sigma$	Paramètre matrice de covariance d'une loi normale multivariée

#### Lettres latines

$(f^I, \mu^\Omega)$	Mesure de probabilité
$(X, Y)$	Couple de variables aléatoires
$\chi^2(\alpha_\chi)$	Loi du $\chi^2$ avec $\alpha_\chi$ degrés de liberté
$\mathbb{M}_k$	Moment d'ordre $k$ de la variable aléatoire $X$
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathcal{Biso}(BetP)$	Ensemble des fonctions de croyance de probabilité pignistique $BetP$
$\mathcal{K}(\mu_K, \nu_K, L)$	Loi $\mathcal{K}$ de paramètres $\mu_K$ , $\nu_K$ et $L$
$\mathcal{N}(\delta, \sigma^2)$	Loi Gaussienne de paramètres $\delta$ et $\sigma^2$
$\mathcal{R}$	Cadre de discernement spécifique

---



$\mathcal{R}(\sigma_R)$	Loi de Rayleigh de paramètre $\sigma_R$
$\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)$	Loi de Weibull de paramètre $\lambda_W$ et $k_W$
$\odot$	Opérateur de la combinaison conjonctive normalisée
$\oplus$	Opérateur de la combinaison conjonctive non normalisée
$\overline{\mathbb{R}}$	Ensemble des nombres réels étendus
$\overline{P}, \underline{P}$	Probabilité supérieure et inférieure
$\text{sgn}$	Fonction signe
$B$	Échelle de Beaufort
$b^{\mathcal{C}}$	Fonction d'implicabilité définie sur $2^{\mathcal{C}}$
$bel^{\mathcal{C}}$	Fonction de crédibilité définie sur $2^{\mathcal{C}}$
$bel^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b])$	Fonction de crédibilité associée à l'intervalle $[a; b]$
$Betf([a; b])$	Densité de probabilité pignistique associée à l'intervalle $[a; b]$
$betP$	Probabilité pignistique définie sur $2^{\mathcal{C}}$
$c$	Vitesse de propagation de l'onde électromagnétique
$c(k)$	Vitesse de phase de nombre d'onde $k$
$C_i$	Classe $i$
$c_m$	Vitesse de phase du pic gravité-capillarité
$c_p$	Vitesse de phase des vagues de longueurs d'ondes du pic basse fréquence du spectre de gravité
$d$	Dimension d'un vecteur
$D(k, \phi)$	Fonction angulaire
$D(k, \phi)$	Fonction angulaire
$d_c$	Distance entre la surface maritime et le fond
$E[X]$	Moment d'ordre 1 de la variable aléatoire $X$
$E^i$	Champ électrique incident
$E^s$	Champ électrique réfléchi
$f^{\mathcal{T}}(a; b)$	Densité de probabilité attribuée à l'intervalle $[a; b]$
$f_c$	Fréquence de coupure
$F_X$	Fonction de répartition de la variable aléatoire $X$
$f_X$	Fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $X$
$f_{X,Y}(x, y)$	Fonction de densité conjointe du couple $(X, Y)$
$f_X(x)$	Fonction de densité marginale
$G1, G2$	Bruits utilisés pour générer une surface maritime
$g_0$	Accélération de la gravité

---

$G_e$	Gain de l'antenne émettrice
$G_r$	Gain de l'antenne réceptrice
$H_c$	Distance verticale entre un creux et une crête sur une période $T_c$
$H_{1/3}$	Hauteur significative des vagues
$h_{mi}$	Espérance du log-vraisemblance des données complétées de la $m^{\text{ième}}$ valeurs pour la $i^{\text{ième}}$ composante
$HC_{\alpha_{cut}}$	Hypersurface de même probabilité
$HV_{\alpha}$	Ensemble des intervalles emboîtés
$I$	Espace indice
$i, m$ et $u$	Indices génériques
$K$	Nombre d'éléments constituant un mélange de distributions
$k$	Nombre d'onde d'une vague
$k_p$	Nombre d'onde au maximum du spectre
$k_x, k_y$	Composante du nombre d'onde suivant $x$ et suivant $y$
$k_W$	Paramètre de forme d'une loi de Weibull
$L(\mathbf{x}; \Xi)$	Maximum de vraisemblance des données $\mathbf{x}$ avec $\Xi$ à estimer
$L_c$	Longueur de corrélation
$L_x, L_y$	Dimension de la surface maritime
$L_{PM}$	Spectre de forme de Pierson
$M, N$	Nombre de points en $x$ et en $y$ pour la surface maritime
$m^{C \times \Theta \downarrow \Theta}$	Fonction de masse de marginalisation
$m^C$	Fonction de masse définie sur le cadre de discernement $\mathcal{C}$
$m^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b])$	Densité de masse attribuée à l'intervalle $[a; b]$
$m^{\Theta \uparrow \mathcal{C} \times \Theta}$	Extension à vide
$m^{\Theta}[D]$	Fonction de masse conditionnelle
$N$	Nombre de classes
$n$	Nombres d'échantillons contenu dans un vecteur
$N_s$	Nombres d'éléments constituant une mesure spectrale
$p$	Polarisation en émission
$P_A$	Densité de probabilité de la SER de la surface maritime
$P_D$	Probabilité de détection
$P_e$	Puissance émise
$P_r$	Puissance reçue
$P_T$	Densité de probabilité de la SER de la cible

---

$P_Z$	Distribution des pentes
$P_{FA}$	Probabilité de fausse alarme
$p_{FL}$	Exposant du spectre de Fung et Lee
$pl^{\mathcal{C}}$	Fonction de plausibilité définie sur $2^{\mathcal{C}}$
$pl^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b])$	Fonction de plausibilité associée à l'intervalle $[a; b]$
$q$	Polarisation en réception
$Q(\Xi, \Xi^l)$	Espérance du log-vraisemblance des données complétées
$q^{\mathcal{C}}$	Fonction de communalité définie sur $2^{\mathcal{C}}$
$q^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b])$	Fonction de communalité associée à l'intervalle $[a, b]$
$R_e$	Distance entre la cible et l'émetteur
$R_r$	Distance entre la cible et le récepteur
$r_{JW}$	Exposant du facteur d'amélioration de JONSWAP
$S$	Salinité de l'eau de mer
$S(k)$	Spectre omnidirectionnel
$S^{d-1}$	Sphère unité de dimensions $n - 1$
$S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)$	Loi $\alpha$ -stable de paramètres $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$
$T$	Température de l'eau de mer en $^{\circ}$
$t_1$	Variable utilisée lors de l'estimation de $\alpha$ pour la méthode de Press
$t_2$	Variable utilisée lors de l'estimation de $\alpha$ pour la méthode de Press
$T_c$	Temps séparant deux passages successifs dans le même sens par le niveau moyen
$U_*$	Vent de friction
$U_z$	Vent considéré à une altitude $z$
$w$	Pulsation de l'onde
$w_p$	Pulsation de la houle au maximum du spectre
$X \sim \mathcal{E}(\alpha_E)$	Loi exponentielle de paramètre $\alpha_E$
$X_f$	Fetch en mètre
$Z$	Impédance du milieu
$z(x, y, t)$	Variable élévation de l'état de mer au point $(x, y)$ à l'instant $t$
$z_c$	Pente dans la direction travers au vent
$Z_s$	Seuil
$z_u$	Pente dans la direction du vent
$z_v$	Altitude du vent
<b>B</b>	Vecteur champ magnétique
<b>E</b>	Vecteur champ électrique

---

$\mathbf{J}$	Vecteur densité de courant
$\mathbb{P}(X \leq x) \geq f$	$f$ -quantile de la variable aléatoire $X$
$\mathbf{A}$	Potentiel vecteur magnétique
$\mathbf{E}_i$	Champ magnétique incident
$\mathbf{E}_s$	Champ rayonné
$\mathbf{H}_i$	Champ magnétique tangentiel incident
$\mathbf{H}_t$	Champ magnétique tangentiel total sur la surface
$\mathbf{J}_s$	Densité de courant de surface
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal à la surface
$\mathcal{D}$	Nombre de paramètre d'une loi
$\mathcal{F}$	Éléments focaux associés à une densité de probabilité
$\mathcal{I}$	Ensemble des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$
$\mathcal{P}(\Omega)$	Ensemble des parties de $\Omega$
$\mathcal{S}$	Fiabilité de la source
$\mathcal{T}$	Ensemble des points obtenu par un intervalle de $\mathcal{I}$
$g$	Densité de probabilité d'un mélange de Gaussiennes



# Liste des acronymes

<b>ACP</b>	Analyse en Composante Principale
<b>ASDIC</b>	Anti Submarine Detection Investigation Committee
<b>COR</b>	Caractéristiques Opérationnelles de Détection
<b>DSTO</b>	Defence Science and Technology Organisation
<b>ECF</b>	Empirical Characteristic Function
<b>ENSTA</b>	École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
<b>EM</b>	Expectation-Maximization
<b>FDTD</b>	Finite Difference Time Domain Technique
<b>FEM</b>	Finite Element Model
<b>GO</b>	Geometrical Optics
<b>GTD</b>	Geometric Theory of Diffraction
<b>HH</b>	Horizontal-Horizontal
<b>HV</b>	Horizontal-Vertical
<b>ILDC</b>	Incremental Length Diffraction Coefficients
<b>JONSWAP</b>	JOint North Sea WAve Project
<b>KA</b>	Kirchhoff Approximation
<b>Lab-STICC</b>	Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Information, de la Communication et de la Connaissance
<b>LSE</b>	Least Squares Estimation
<b>McC</b>	Méthode des quantiles de McCulloch
<b>MCT</b>	Modèle des Croyances Transférables
<b>MEC</b>	Method of Equivalent Currents
<b>MLE</b>	Maximum Likelihood Estimation
<b>MoM</b>	Method of Moment
<b>PO</b>	Physical Optics
<b>PROJ</b>	PROJection
<b>PTD</b>	Physical Theory of Diffraction
<b>QTC</b>	Quester Tangent Corporation
<b>RADAR</b>	RAdio Detection And Ranging
<b>REG</b>	Méthode de la fonction caractéristique de Koutrouvelis
<b>SAR</b>	Synthetic Aperture Radar
<b>SHOM</b>	Service Hydrographique et Océanique de la Marine

**SONAR** SOund Navigation And Ranging

**SPM** Small Perturbation Method

**SSA** Small Slope Approximation

**UTD** Uniform Theory of Diffraction

**VH** Vertical-Horizontal

**VV** Vertical-Vertical

# Liste des figures

1	Représentation des années de publications en fonction de la somme cumulée des articles. . . . .	3
1.1	Illustration de l'expérience de Colladon et Sturm réalisée sur le lac Léman. . . . .	10
1.2	Telemobiloskop exposé au musée de Munich. . . . .	11
1.3	Exemple de polarisation en émission et en réception. . . . .	14
1.4	Ellipse de polarisation. . . . .	15
1.5	Influence des paramètres de la loi normale sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	19
1.6	Influence des paramètres de la loi de Weibull sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	20
1.7	Influence des paramètres de la loi de Rayleigh sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	21
1.8	Influence des paramètres de la loi exponentielle sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	21
1.9	Influence des paramètres de la loi de gamma sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	22
1.10	Influence des paramètres de la loi $\mathcal{K}$ sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	24
1.11	Influence des paramètres de la loi du $\chi^2$ sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition. . . . .	25
2.1	Représentation du nombre de publications par décennie. . . . .	31
2.2	Représentation de la densité de probabilité des distributions $\alpha$ -stables. . . . .	34
2.3	Comportement asymptotique des lois stables . . . . .	35
2.4	Représentation de la fonction de répartition des distributions $\alpha$ -stables. . . . .	37
2.5	Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre $\alpha$ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_\alpha(1, 1, 0)$ . . . . .	46
2.6	Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre $\beta$ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(\beta, 1, 0)$ . . . . .	46
2.7	Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre $\gamma$ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, \gamma, 0)$ . . . . .	47
2.8	Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre $\delta$ dans le cas d'une densité de probabilité unimodale $S_{1,4}(1, 1, \delta)$ . . . . .	47
2.9	Boîtes de Tukey représentant les performances de la méthode des moindres carrés et de la méthode du maximum de vraisemblance. . . . .	49



2.10	Comparaison entre le MLE et le LSE dans le cas d'un mélange de distributions. .	49
2.11	Isocontours des densités de probabilité d'une loi $\alpha$ -stable dans $\mathbb{R}^2$ ainsi que les densités spectrales réelles et estimées par les méthodes PROJ et ECF. . . . .	53
2.12	Boîtes de Tukey des paramètres $\alpha$ et mesures spectrales pour chaque densité à partir des méthodes PROJ et ECF. . . . .	54
3.1	Schéma décrivant la méthode des $k$ plus proches voisins. . . . .	60
3.2	Schéma d'un neurone biologique. . . . .	61
3.3	Schéma d'un neurone formel . . . . .	61
3.4	Illustration d'une distribution de possibilité. . . . .	64
3.5	Représentation graphique de $\mathcal{T}$ . . . . .	70
3.6	Illustration dans $\mathcal{T}$ des fonctions de crédibilité, plausibilité et communalité. . . .	71
3.7	Densité de probabilité . . . . .	72
3.8	Représentation graphique de la fonction de plausibilité $pl([a; b])$ . . . . .	73
3.9	Validation de notre approche à partir de celle de Caron <i>et al.</i> dans le cas d'une classification de données cinématiques modélisées par des densités de probabilité Gaussienne . . . . .	75
3.10	Comparaison entre les fonctions de plausibilité obtenues par la méthode de Caron et Doré dans le cas d'un mélange de Gaussiennes. . . . .	76
3.11	Représentation de la densité de probabilité pour chaque classe. . . . .	78
3.12	Représentation de la base de test . . . . .	79
3.13	Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des $k$ plus proches voisins. . . . .	79
3.14	Représentation de la classification de données générées Gaussiennes par la méthode Bayésienne. . . . .	80
3.15	Représentation de la classification de données générées Gaussiennes par la théorie des fonctions de croyance continues. . . . .	82
3.16	Représentation de la densité de probabilité $\alpha$ -stable. . . . .	82
3.17	Représentation de la base de test. . . . .	84
3.18	Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des $k$ plus-proches voisins. . . . .	84
3.19	Représentation de la classification de données générées $\alpha$ -stables par la méthode Bayésienne. . . . .	85
3.20	Représentation de l'estimation des fonctions de répartition dans le cas de données issues d'une loi $\alpha$ -stable dans $\mathbb{R}$ . . . . .	87
3.21	Représentation de l'estimation des densités de probabilité dans le cas de données issues d'une loi $\alpha$ -stable dans $\mathbb{R}$ . . . . .	87
3.22	Représentation de la classification de données générées $\alpha$ -stables par la théorie des fonctions de croyance. . . . .	88
3.23	Représentation de l'écho d'un fond vaseux en fonction du temps. . . . .	90
3.24	Représentation des données réelles dans un espace à deux dimensions. . . . .	90
3.25	Représentation des fonctions de répartition des attributs et leurs estimations par le modèle Gaussien et $\alpha$ -stable. . . . .	91
3.26	Représentation des densités de probabilité des attributs et leurs estimations par le modèle Gaussien et $\alpha$ -stable. . . . .	91
3.27	Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des $k$ plus proches voisins. . . . .	92
3.28	Représentation de la base de test classifiée. . . . .	93
4.1	Répartition de la température des océans . . . . .	98

---

4.2	Répartition de la salinité à travers le globe. . . . .	99
4.3	Variation de la constante diélectrique en fonction de la fréquence. . . . .	100
4.4	Décomposition d'une surface maritime à partir de surfaces sinusoïdales indépen- dantes. . . . .	102
4.5	Définition de la taille des vagues. . . . .	103
4.6	Définition de la hauteur significative par Sverdrup et Munk. . . . .	104
4.7	Distributions des pentes de Cox et Munk pour différentes vitesses de vent. . . . .	105
4.8	Spectre de Pierson Moscovitz . . . . .	108
4.9	Spectre de JONSWAP. . . . .	109
4.10	Spectre de Fung et Lee. . . . .	109
4.11	Spectre d'Elfouhaily (version [69, 70]). . . . .	111
4.12	Spectre obtenu avec la version corrigée du spectre d'Elfouhaily. . . . .	111
4.13	Fonction angulaire d'Elfouhaily en fonction de la vitesse de vent. . . . .	114
4.14	Spectre d'Elfouhaily à 2 dimensions en fonction du nombre d'onde pour une vitesse du vent de 5 m/s, une direction du vent $\phi = 0^\circ$ et une mer développée. . . . .	115
4.15	Exemple de surface avec le spectre d'Elfouhaily. . . . .	116
4.16	Classification des différents modèles de diffusion. . . . .	117
4.17	Configuration géométrique définissant les angles bistatiques. . . . .	118
4.18	Coefficients de diffusion obtenus par l'approximation de Kirchhoff dans le cas bistatique pour $\theta_i = 30^\circ$ . . . . .	119
4.19	Coefficients de diffusion par le modèle des petites perturbations à l'ordre 1 dans le cas bistatique pour $\theta_i = 30^\circ$ . . . . .	120
4.20	Configuration utilisée. . . . .	121
4.21	Géométrie d'une facette . . . . .	123
4.22	Découpage de la surface par des facettes triangulaires . . . . .	124
4.23	Chaîne globale d'observation et de traitement. . . . .	125
4.24	Comparaison du champ diffusé de la surface maritime obtenu par l'approximation de Kirchhoff, la méthode des petites perturbations et l'optique physique dans le cas d'une polarisation HH, une vitesse du vent $v = 3$ m/s, une direction du vent $\phi = 0^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ et $\phi_s = 0^\circ$ . . . . .	126
4.25	Représentations des densités de probabilité de la surface équivalente radar et de leurs estimations (Weibull, $\mathcal{K}$ et $\alpha$ -stable) exprimées en linéaire et en dB avec une polarisation HH, $\theta_i = 30^\circ$ , $\theta_s = 30^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ , $\phi = 0^\circ$ et $v = 3$ m/s. . . . .	127
4.26	Taux de réussite du test de Kolmogorov-Smirnov. . . . .	128
4.27	Représentations de la densité de probabilité et de la fonction de répartition du champ diffusé ainsi que de leurs estimations par les lois de Weibull, $\mathcal{K}$ et $\alpha$ -stable pour une polarisation HH, $\theta_i = 30^\circ$ , $\theta_s = 60^\circ$ , $\phi_i = 0^\circ$ , $\phi_s = 0^\circ$ , une direction du vent $\phi = 0^\circ$ et une vitesse du vent $v = 3$ m/s. . . . .	129
4.28	Densité de probabilité des paramètres de la distribution $\alpha$ -stable estimés pour la configuration adoptée. . . . .	129
4.29	Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre $\alpha$ . . . . .	130
4.30	Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre $\beta$ . . . . .	130
4.31	Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre $\gamma$ . . . . .	131
4.32	Configuration géométrique d'observation définissant les angles bistatiques. . . . .	133
4.33	Représentation des densités de probabilité et des courbes COR suivant les modèles d'estimation de la densité de probabilité de la surface équivalente radar de la surface maritime. . . . .	134
4.34	Influence de la polarisation de l'onde sur la densité de probabilité du paramètre $\delta$ . . . . .	136
4.35	Influence de la vitesse du vent sur la densité de probabilité du paramètre $\delta$ . . . . .	137

4.36	Influence de la direction du vent sur la densité de probabilité du paramètre $\delta$ . . .	138
D.1	Dérivée de la pdf par rapport à $\delta$ avec $\gamma=1$ et $\delta=0$ . . . . .	151
D.2	Dérivée de la pdf par rapport à $\gamma$ avec $\gamma=1$ et $\delta=0$ . . . . .	152
D.3	Dérivée de la pdf par rapport à $\alpha$ avec $\gamma=1$ et $\delta=0$ . . . . .	152
E.1	Approximation de Kirchhoff. . . . .	154
E.2	Schéma de l'approximation de Kirchhoff. . . . .	155

# Liste des tableaux

2.1	Valeurs des paramètres. . . . .	48
2.2	Paramètre $\alpha$ et mesures spectrales. . . . .	53
3.1	Analogie entre le neurone formel et biologique . . . . .	61
3.2	Comparaison entre la combinaison conjonctive normalisée et non normalisée. . . . .	67
3.3	Exemple de bba définie sur $[0;1]$ avec un nombre fini d'éléments focaux. . . . .	70
3.4	Moyennes et matrices de covariance des distributions Gaussiennes. . . . .	77
3.5	Matrice de confusion dans le cas de données générées par une Gaussienne (à gauche kppv et à droite kppv crédibiliste) . . . . .	78
3.6	Matrice de confusion dans le cas de données générées Gaussiennes (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 1d; en haut à droite : approche Bayésienne avec le modèle $\alpha$ -stable 1d; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche Bayésienne avec le modèle $\alpha$ -stable 2d) . . . . .	81
3.7	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi Gaussienne dans $\mathbb{R}$ . 81	
3.8	Matrice de confusion dans le cas de données générées Gaussiennes (en haut à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 1d; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle $\alpha$ -stable 1d; en bas à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle $\alpha$ -stable 2d). . . . .	83
3.9	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi Gaussienne dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	83
3.10	Paramètres caractérisant les distributions $\alpha$ -stable générées. . . . .	83
3.11	Matrice de confusion dans le cas de données générées par une $\alpha$ -stable (à gauche kppv et à droite kppv crédibiliste) . . . . .	83
3.12	Matrice de confusion dans le cas de données générées $\alpha$ -stable (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 1d; en haut à droite : approche Bayésienne avec le modèle $\alpha$ -stable 1d; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche Bayésienne avec le modèle $\alpha$ -stable 2d) . . . . .	86
3.13	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi $\alpha$ -stable dans $\mathbb{R}$ . .	86
3.14	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi $\alpha$ -stable dans $\mathbb{R}^2$ . 86	

3.15	Matrice de confusion dans le cas de données générées $\alpha$ -stable (en haut à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 1d ; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle $\alpha$ -stable 1d ; en bas à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle $\alpha$ -stable 2d) . . . . .	89
3.16	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données réelles de $\mathbb{R}$ . . . . .	89
3.17	Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données réelles de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	89
3.18	Matrice de confusion dans le cas de données réelles (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien ; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien ; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle $\alpha$ -stable, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle $\alpha$ -stable) . . . . .	92
4.1	Lien entre l'échelle Beaufort et la vitesse du vent . . . . .	101
4.2	Récapitulatif des caractéristiques des différents spectres. . . . .	112
C.1	Estimées de $\alpha$ en fonction de $\nu_\alpha$ et $\nu_\beta$ . . . . .	147
C.2	Estimées de $\beta$ en fonction de $\nu_\alpha$ et $\nu_\beta$ . . . . .	148
C.3	Valeurs de la fonction $\psi_3(\alpha, \beta)$ . . . . .	148
C.4	Valeurs de la fonction $\psi_5(\alpha, \beta)$ . . . . .	149
C.5	Nombre de point $K$ optimal. . . . .	150
C.6	Nombre de point $L$ optimal. . . . .	150

# Introduction générale

Les systèmes de transmission et de communication actuels, tels que la radio et la téléphonie mobile, sont principalement fondés sur l'émission et la réception d'une onde électromagnétique. Les ondes électromagnétiques ont la particularité de véhiculer de l'information, permettant ainsi d'explorer et de surveiller l'environnement qui nous entoure à partir d'un système RADAR (on retrouve l'acronyme RADAR ainsi que l'écriture radar). Le système radar peut être utilisé dans un environnement maritime afin de surveiller les côtes maritimes ou de contrôler le trafic maritime. Ces objectifs impliquent alors de détecter et d'effectuer un suivi de cibles, comme par exemple de hors-bord dans une lutte anti-drogue, de bateaux pratiquant le dégazage sauvage ou la pêche illégale. Lors de l'étape de détection, il est important de pouvoir distinguer le signal utile réfléchi par la cible des échos indésirables réfléchis par la surface maritime, appelés aussi fouillis de mer. La caractérisation du fouillis de mer est alors primordiale pour obtenir de bonnes performances de détection.

Il est possible de trouver une technologie analogue au radar dans le milieu sous-marin : il s'agit du système SOund Navigation And Ranging (on retrouve l'acronyme SONAR ainsi que l'écriture sonar). Le sonar diffère du radar notamment par l'utilisation d'ondes acoustiques. Le système sonar est utilisé dans le cadre d'applications civiles, comme la cartographie sous-marine, la prospection minière ou la surveillance de l'accrétion océanique. Le développement d'algorithmes de classification automatique des sédiments marins est une étape importante pour mener à bien ces applications.

Les données acquises par ces technologies sont issues de situations naturelles et engendrées par des phénomènes aléatoires. La motivation principale de ce manuscrit de thèse porte sur la caractérisation, l'analyse et le traitement de ces données. La nature dite complexe des données peut être générée par des données manquantes, imprécises et/ou incertaines. En règle, générale, ces données considérées comme aléatoires vont être caractérisées, analysées et traitées à partir d'une approche statistique. En traitement du signal, les méthodes statistiques ont longtemps été fondées sur l'hypothèse que les données soient issues d'une loi de Gauss dite aussi loi normale, comme son nom l'indique a été introduite au XIX<sup>ème</sup> siècle par Johann Carl Friedrich Gauss. Il s'agit de la loi la plus connue et utilisée des lois de probabilité théoriques. En effet, la loi de Gauss est célèbre grâce à la représentation en forme de cloche de sa densité de probabilité. De plus, elle est très souvent utilisée car elle possède des propriétés intéressantes :

- la loi Gaussienne est stable par combinaison linéaire.
- le théorème de la limite centrale établit la convergence en loi de la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées vers une loi Gaussienne justifiant son utilisation dans de nombreuses applications.
- la méthode des moindres carrés dans la théorie des erreurs d'observation permet de minimiser l'impact des erreurs sous l'hypothèse d'erreurs normalement distribuées.

Historiquement, la méthode des moindres carrés a été introduite par Gauss pour calculer l'orbite d'une planète [67]. En 1801, un moine italien du nom de Giuseppe Piazzi observa l'astéroïde Cérès pendant 41 jours consécutifs avant de perdre toute trace de l'astre. Gauss proposa alors

sa méthode des moindres carrés permettant de calculer l'orbite d'une planète avec peu d'observations et prédit correctement où et quand Cérès réapparaîtrait. Cependant, les méthodes fondées sous l'hypothèse Gaussienne ne sont plus valables dès lors que cette hypothèse n'est plus vérifiée. L'opérateur va alors se tourner vers d'autres lois de probabilité théoriques utilisées et exploitées dans plusieurs domaines : en mécanique, communication, télécommunication... dont voici une liste non-exhaustive : Weibull, Rayleigh,  $\mathcal{K}$ , log-normal, Rice... L'hypothèse que les données soient issues d'une loi de probabilité va être ensuite validée ou rejetée au moyen de tests statistiques comme celui du  $\chi^2$  ou de Kolmogorov-Smirnov. En pratique, il est possible d'observer sur les histogrammes construits à partir des données une asymétrie et/ou une queue lourde. L'asymétrie est caractérisée par le fait que la densité de probabilité n'est pas symétrique par rapport à un mode. Le phénomène de queue lourde se traduit par une décroissance asymptotiquement plus lente de la queue de la distribution considérée par rapport à la queue d'une distribution Gaussienne. Ces propriétés obéissent à des lois appelées distributions  $\alpha$ -stables. Le concept de distributions  $\alpha$ -stables a été introduit par Paul Lévy [141] en 1924 dans l'article intitulé *Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles* où il reprend la théorie des erreurs fondée sur la loi de Gauss. La première application des lois stables a été introduite bien avant la parution de l'article de Lévy [141] par l'astronome danois Holtsmark [102] : la force gravitationnelle exercée par le système stellaire sur un point de l'univers obéit à une loi stable d'exposant caractéristique  $\alpha = 1.5$ . La particularité de ces distributions est qu'elles sont dites stables par combinaison linéaire, ce qui induit que la loi Gaussienne est un cas particulier de lois stables. Cette propriété permet alors de généraliser le théorème de la limite centrale appliqué au cas Gaussien au théorème de la limite centrale généralisé appliqué à la loi  $\alpha$ -stable : la somme de  $n$  variables indépendantes appartenant à une même loi stable converge vers une loi stable. En pratique, la définition d'une loi stable est établie à partir de l'expression de la fonction caractéristique dépendant de quatre paramètres : l'exposant caractéristique  $\alpha$ , le paramètre de symétrie  $\beta$ , le paramètre de dispersion  $\gamma$  et le paramètre de position  $\delta$ . Cependant, il existe plusieurs paramétrisations de la fonction caractéristique suivant l'application choisie comme celles proposées par Zolotarev [236] ou par Taqqu et Samorodnisky [213]. L'expression de la densité de probabilité est obtenue par une transformée de Fourier de la fonction caractéristique : la densité de probabilité n'a donc pas d'expression analytique [162]. À la suite de la parution de l'article de Lévy, les lois stables ont été peu utilisées jusqu'aux travaux de Mandelbrot [142] appliqués à la finance au début des années 60, phénomène illustré par la Figure 1 (cette figure est fondée sur la bibliographie réalisée par Nolan [164]). Le modèle fondamental des variations des prix, introduit par Bachelier [12] en 1900, suivait une loi de Gauss. Cependant, le modèle Gaussien est limité puisqu'il ne prend pas en compte le hasard boursier, représenté par une succession de hausses et baisses. Depuis quelques années, les problèmes de communication [127, 160] s'intéressent à modéliser des bruits à faibles probabilité d'apparition mais à fortes amplitudes, qu'on appelle bruit impulsif.

Dans ce manuscrit, nous utilisons une approche statistique à partir des distributions  $\alpha$ -stables afin d'estimer des données issues de phénomènes aléatoires dans le domaine maritime : la caractérisation des fonds marins et la caractérisation des échos indésirables réfléchis par l'environnement, appelés aussi fouillis de mer (*clutter* en anglais). Ces deux applications utilisent des technologies analogues afin d'acquérir les données : sonar et radar. En effet, chaque système émet une onde en direction d'une cible, cette cible va alors à son tour réfléchir l'onde reçue puis au final un récepteur capte l'onde réfléchie. Le sonar utilise une onde acoustique alors que le radar utilise une onde électromagnétique. Il s'avère que les données issues des capteurs peuvent se caractériser par des phénomènes de queues lourdes et d'asymétrie. Dans une problématique de caractérisation des sédiments marins, la surface des océans nous pousse à retenir une classification automatique. Du point de vue applicatif, cette problématique se justifie dans des domaines divers [140] : la

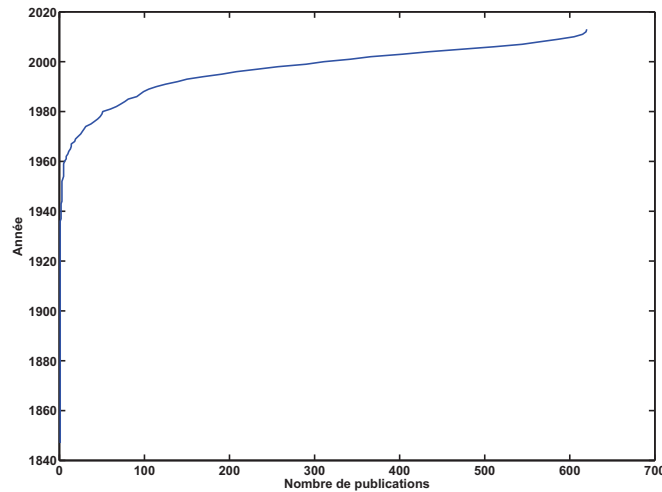


FIGURE 1 – Représentation des années de publications en fonction de la somme cumulée des articles.

prospection minière, la recherche de pétrole, la surveillance de l'accrétion océanique, la cartographie maritime... De nombreux travaux sur la classification automatique de fonds marins ont notamment été proposés par le passé. Par exemple, les logiciels QTC-View [179] et RoxAnn [38] sont actuellement utilisés dans le domaine de la cartographie maritime. Des travaux ont aussi été réalisés permettant de classer ou de segmenter les fonds marins à partir de méthodes que nous qualifions de répandues :  $k$  plus proches voisins [64], réseaux de neurones [151], machines à vecteurs de support [220]... Par exemple, Laanaya [129] développe une méthode de classification supervisée d'images sonar fondée sur la notion de texture à partir de méthodes comme les machines à vecteurs de support ou l'algorithme des  $k$  plus proches voisins. Leblond [132] utilise une classification par la méthode des  $k$  plus proches voisins. Karoui [110] segmente des images à partir d'attributs texturaux sélectionnés par un critère de similarité. Une classification supervisée à partir d'une méthode Bayésienne a aussi été utilisée par Williams [231] où les attributs continus sont modélisés par une densité de probabilité. L'inconvénient avec ce genre de méthodes est que les données mesurées peuvent être imprécises et/ou les attributs ont des opinions différentes sur le type de sédiments à classer : ce phénomène engendre de l'incertitude et/ou de l'imprécision. Ces deux notions peuvent être prises en compte par des théories dites incertaines :

- la théorie des probabilités imprécises [223].
- la théorie des possibilités [235].
- la théorie des fonctions de croyance [50, 197, 202].

Dans le cadre de la caractérisation des fonds marins [80], nous avons montré l'intérêt d'utiliser la théorie des fonctions de croyance plutôt qu'une méthode Bayésienne. Les attributs des distributions étaient modélisés par un mélange de Gaussiennes. Les données réelles que nous avons à notre disposition sont acquises par un sondeur monofaisceau puis traitées par le logiciel QTC-View pour obtenir les attributs. La représentation de la densité de probabilité des attributs présente les propriétés de queues lourdes et d'asymétrie : il convient donc de modéliser ces attributs par des distributions  $\alpha$ -stables.

Les phénomènes de queues lourdes [71] peuvent être observés lorsqu'il s'agit de caractériser statistiquement le fouillis de mer, par opposition à l'écho utile issu de l'objet d'intérêt. Le fouillis de mer se caractérise par de grandes valeurs de signaux (que l'on nomme par abus de langage *spike*) [93]. La caractérisation du fouillis de mer est primordiale dans des problématiques de



surveillance maritime car il permet de distinguer le fouillis de mer du signal utile de la cible. Des travaux ont déjà été effectués à partir de distributions de log-normal [215], Weibull [75],  $\mathcal{K}$  [105, 106]... Cependant, nous n'avons pas à notre disposition de données réelles représentant du fouillis de mer. Des travaux au sein du groupe Radar, Électromagnétisme et Télédétection (REMT) de l'ENSTA Bretagne et aussi membre du Laboratoire des sciences et techniques de l'information, de la communication et de la connaissance (Lab-STICC UMR CNRS 6285) ont notamment été réalisés afin de caractériser le fouillis de mer dans différents contextes. Par exemple, Arnold-Bos [7] étudie le problème de détection d'un navire dans des images haute-résolution à partir du sillage de navires ; Rochdi [187] estime la contribution du champ diffusé par une cible complexe placée sur une surface maritime. Le simulateur du champ diffusé est issu de ces travaux. Le calcul du champ diffusé se décompose en deux étapes. Tout d'abord, il est nécessaire de générer une surface maritime. Cette dernière se décompose en une somme de surfaces sinusoïdales avec des fréquences, des directions et des amplitudes différentes. Plusieurs spectres de mer comme le spectre de Philips [173], Pierson et Moskowitz [176], Fung et Lee [84], JONSWAP [100] et Elfouhaily [69], modélisant les caractéristiques géométriques et électromagnétiques de la surface de mer, ont été proposés dans la littérature. À partir de cette surface générée, il ne reste plus qu'à déterminer le champ électromagnétique diffusé. Il existe deux grandes familles de méthodes permettant de déterminer le champ diffusé : les méthodes asymptotiques [16, 26, 183] et les méthodes exactes [18, 98]. Les méthodes exactes ont la particularité d'être coûteuses en temps de calcul. Par conséquent, dans ce travail nous avons utilisé une méthode asymptotique pour déterminer les coefficients de diffusion. La méthode asymptotique retenue est appliquée en tenant compte de différents contraintes, d'hypothèses et de la complexité de l'objet à considérer (arêtes, bords...).

## Organisation du manuscrit

Le mémoire de thèse est organisé en quatre chapitres. Le **premier chapitre** permet tout d'abord d'introduire les systèmes et technologies permettant d'acquérir les données ainsi que les différents domaines d'applications associées : SOund Navigation And Ranging (sonar) et RAdio Detection And Ranging (radar). Nous développons plus en détail le formalisme utilisé en radar qui sera repris dans le quatrième chapitre. Les données issues de capteurs vont être ensuite analysées à partir d'une approche statistique. Nous rappelons notamment la notion de variable aléatoire, de fonction de répartition et de densité de probabilité. Nous fournissons une liste non-exhaustive de lois de probabilité théoriques couramment utilisées en traitement de données et de signaux. Ces modèles servent ainsi à estimer des données représentées par une variable aléatoire. En règle générale, on introduit l'hypothèse que les données soient issues d'une loi  $\mathcal{L}$  puis on vérifie si cette hypothèse est vraie. Cette démarche correspond en statistique descriptive à des tests d'ajustement permettant d'accepter ou de rejeter une hypothèse. L'ensemble des méthodes statistiques vont permettre d'analyser les données issues des différents capteurs considérés.

Dans le **deuxième chapitre**, nous définissons une classe de distributions particulière appelée distributions  $\alpha$ -stables. L'avantage de ces distributions est de pouvoir modéliser les caractéristiques de queue lourde et d'asymétrie rencontrées sur la représentation de la densité de probabilité. Nous définissons les notions de stabilité, de fonction caractéristique, de fonction de répartition, de fonction de densité de probabilité ainsi que les propriétés comme le théorème de la limite centrale généralisé. Nous présentons aussi l'algorithme permettant de générer une distribution  $\alpha$ -stable. Ensuite, nous exposons les méthodes permettant de décrire ou caractériser une variable aléatoire issue d'une loi  $\alpha$ -stable. Les estimateurs des lois stables sont comptabilisés au nombre de quatre : quantile, moment, maximum de vraisemblance et moindres carrés. Il est important de noter que nous n'avons pas trouvé dans la littérature un algorithme traitant de la

méthode des moindres carrés appliquée aux lois  $\alpha$ -stables : nous nous proposons de la développer. Dans ce chapitre, les performances des différents estimateurs sont étudiées en comparant les vitesses de temps de calcul ainsi que l'erreur quadratique moyenne. Les lois  $\alpha$ -stables ont aussi été généralisées dans  $\mathbb{R}^n$ . Les définitions de la stabilité et de la densité de probabilité sont notamment exposées. L'estimation de ces lois dans  $\mathbb{R}^n$  se fait à partir de deux estimateurs : la méthode de projection [150] (appelée méthode PROJ) et la méthode de la fonction caractéristique empirique [166] (appelée méthode ECF pour *Empirical Characteristic Function Method*). Nous comparons aussi les performances de ces deux estimateurs.

Le **troisième chapitre** porte sur la première application traitée dans ce travail. Nous utilisons les distributions  $\alpha$ -stables dans le cadre d'une problématique de classification automatique de sédiments marins. Tout d'abord, nous présentons une liste non-exhaustive de méthodes couramment utilisées en classification :  $k$  plus proches voisins [64], réseaux de neurones [151], méthode Bayésienne. L'inconvénient avec ces méthodes est qu'elles ne modélisent pas les notions d'imprécision et/ou d'incertitude des données. Des méthodes dites incertaines ont été proposées afin de prendre en compte ces notions : la théorie des probabilités imprécises [223], la théorie des possibilités [235] et la théorie des fonctions de croyance [50, 197, 202, 204]. Des approches floues et crédibilistes ont été étendues à la méthode des  $k$  plus proches voisins [53, 112] (par exemple la méthode des  $k$  plus proches voisins crédibiliste utilise le formalisme de la théorie des fonctions de croyance adapté à la méthode des  $k$  plus proches voisins) et aux réseaux de neurones [34, 54]. Dans notre étude, nous avons choisi d'utiliser le formalisme de la théorie des fonctions de croyance du fait de sa souplesse d'utilisation. Le formalisme de la théorie des fonctions de croyance a d'abord été introduit dans le cas discret [50, 197], avec la fonction de masse qui attribue une confiance sur des hypothèses non-exhaustives. Dans notre cas, l'information fournie par les capteurs (sonar) va être modélisée par une densité de probabilité. La théorie des fonctions de croyance a été étendue aux nombres réels [202, 209], où la densité de masse attribue une confiance sur des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Il sera donc important de développer le calcul de la fonction de masse dans le cas où les données sont modélisées par une distribution  $\alpha$ -stable. Un premier travail a été effectué sur des données génériques issues de lois Gaussiennes et  $\alpha$ -stables où les taux de classification obtenus par une méthode Bayésienne et une méthode dite par fonctions de croyance sont comparés. Nous observons aussi l'influence dans le choix du modèle d'estimation sur les taux de classification. Dans un second temps, le travail précédent a été complété en considérant des données réelles acquises par un sondeur monofaisceau.

Le **quatrième chapitre** a pour objectif de caractériser d'une manière statistique les coefficients de diffusion électromagnétique d'une surface de mer. Comme il est difficile de disposer dans ce domaine d'application de données réelles, nous nous sommes dirigés vers des données simulées. Dans un premier temps, nous présentons les caractéristiques physiques [39, 40, 49] et géométriques de la surface de mer. Afin de générer une surface de mer réaliste, nous l'avons considérée comme étant une somme de sinusoïdes de fréquences, de directions et d'amplitudes différentes [91]. Pour atteindre cet objectif de description géométrique, nous avons adopté une description spectrale. Une liste non-exhaustive de spectres [69, 84, 100, 173, 176] généralement utilisés est détaillée et nous expliquons les raisons du choix du spectre d'Elfouhaily [69]. Quant au calcul de la signature électromagnétique de la surface maritime générée, nous avons opté pour l'utilisation de l'Optique Physique [97], qui est répertoriée parmi les méthodes asymptotiques. Ces deux étapes permettront de constituer une base de données de signaux en fonction de différents paramètres (configuration géométrique, polarisations, vitesse du vent et direction du vent). Cette base de données est ensuite analysée par une approche statistique, en comparant plusieurs lois théoriques :  $\mathcal{K}$ , Weibull et  $\alpha$ -stables. Un test de Kolmogorov-Smirnov est utilisé pour valider ou non une hypothèse d'adéquation. Après analyse critique, nous avons retenu la description statistique de la signature électromagnétique de la surface maritime exprimée en décibel (noté

dB) par le modèle  $\alpha$ -stable. L'influence de la polarisation de l'onde et des caractéristiques géométriques d'observation sur les paramètres des distributions  $\alpha$ -stables est analysée.

En dehors des cinq annexes qui ont pour objectif de clarifier et d'apporter des précisions à certains passages, la conclusion dresse un bilan de l'ensemble des travaux réalisés en présentant différentes perspectives offertes au sujet abordé.

# Chapitre 1

## Systèmes d'acquisition et outils de traitement des données

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Systèmes d'acquisition</b>	<b>9</b>
1.2.1	Systèmes acoustiques	9
1.2.1.1	Historique	9
1.2.1.2	Systèmes et technologies de traitement	10
1.2.2	Systèmes micro-ondes	11
1.2.2.1	Historique	11
1.2.2.2	Systèmes et technologies de traitement	11
1.2.2.3	Formalisme électromagnétique	12
<b>1.3</b>	<b>Théorie des probabilités</b>	<b>15</b>
1.3.1	Définitions	15
1.3.2	Quelques lois continues	18
1.3.2.1	Loi Gaussienne	18
1.3.2.2	Loi de Weibull	18
1.3.2.3	Loi de Rayleigh	19
1.3.2.4	Loi exponentielle	20
1.3.2.5	Loi gamma	20
1.3.2.6	Loi $\mathcal{K}$	22
1.3.2.7	Loi $\chi^2$	24
1.3.3	Théorèmes de convergence	25
<b>1.4</b>	<b>Tests statistiques</b>	<b>26</b>
1.4.1	Test du $\chi^2$	26
1.4.2	Test de Kolmogorov-Smirnov	27
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>27</b>

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord les systèmes d'acquisition utilisés en milieu maritime. Nous exposons le principe de fonctionnement du radar et du sonar, ainsi que leurs domaines d'application. Nous développons plus en détails le formalisme électromagnétique découlant des équations de Maxwell nécessaire à la compréhension du chapitre 4. Nous extrayons ensuite l'information fournie par les capteurs. Nous introduisons la théorie des probabilités permettant de caractériser les phénomènes aléatoires. Ces phénomènes étant continus, nous développons les notions de fonction de densité de probabilité, fonction de répartition, moment ainsi que les lois de probabilité les plus utilisées en analyse de données et en traitement du signal. Cependant, un

*processus aléatoire dépend souvent de plusieurs phénomènes. Par conséquent, il est difficile de choisir une loi permettant de représenter finement un tel processus. Dans ce sens, des tests statistiques comme  $\chi^2$  ou de Kolmogorov-Smirnov sont généralement utilisés pour évaluer l'adéquation entre les mesures théoriques et réelles.*

## 1.1 Introduction

La réalisation d'un système radar n'a été possible qu'au travers d'expériences permettant la découverte de différentes propriétés électriques et magnétiques. Le lien entre électricité et magnétisme a été mis en évidence expérimentalement par le chimiste danois Oersted en 1820 : il constata la déviation d'une aiguille aimantée placée à proximité d'un fil parcouru par un courant électrique. Cette relation électricité/magnétisme a été renforcée par l'expérience du physicien britannique Faraday : en effet, si un courant électrique a des effets magnétiques, Faraday démontra qu'un aimant peut aussi avoir des effets électriques. Le mathématicien et physicien français Ampère prit connaissance des travaux d'Oersted et développa la théorie qui allait permettre l'émergence de l'électromagnétisme. En 1864, Maxwell reprend les différents lois de l'électricité et du magnétisme plus connues aujourd'hui sous le nom d'équations de Maxwell. Il s'agit d'environ une vingtaine d'équations qui permettent de lier électricité et magnétisme. Il émet aussi l'hypothèse que la lumière soit une onde électromagnétique. En 1887, le physicien allemand Hertz confirme expérimentalement la théorie de Maxwell selon laquelle la lumière est une onde électromagnétique. Hertz découvrit aussi à l'aide d'un oscillateur d'autres ondes électromagnétiques invisibles, se propageant à la même vitesse que la lumière et susceptibles de se diffracter, de se réfracter et de se polariser. Ces travaux sont notamment à l'origine de la télégraphie sans fil du physicien italien Marconi qui permit considérablement de développer les antennes. Ces ondes électromagnétiques sont aussi utilisées par le système RAdio Detection And Ranging (radar), dont le principe est d'émettre et de recevoir une onde pour déterminer la vitesse et/ou la position d'un objet. Officiellement, la conception du radar est à mettre à l'actif de l'ingénieur écossais Watson-Watt en 1934. Cependant, la première version du radar a été développée par le technicien allemand Hülsmeyer apparue sous le nom de *Telemobiloskop* en 1904. Cette technologie s'est considérablement améliorée durant la seconde guerre mondiale avec notamment la mise en place par les britanniques d'un réseau de radars, appelé *Chain Home*, permettant de surveiller, prévenir et combattre les attaques de la *Luftwaffe*. À la fin de la guerre, des applications civiles ont vu le jour comme le contrôle aérien, la surveillance maritime, l'observation de la terre ou la météorologie. Au final, le radar n'est pas le fruit d'un seul individu mais il est l'héritage de contributions de plusieurs chercheurs de différentes nations. Ce système a été transcrit dans l'eau sous l'appellation de SOund Navigation And Ranging (sonar). Cependant, on utilise des ondes acoustiques à la place des ondes électromagnétiques puisque les ondes électromagnétiques ont une très faible portée dans l'eau. Les premières expériences sur le sonar ont été menées par Colladon et Sturm bien avant les travaux sur le radar. La première application des ondes sonores apparaît à la veille de la première guerre mondiale avec la lutte anti sous-marine. Ce système s'est amélioré notamment durant la seconde guerre mondiale et pendant la guerre froide. Aujourd'hui, les ondes acoustiques sont utilisés pour la cartographie maritime, la pêche, la recherche pétrolière...

Par conséquent, nous présentons dans ce chapitre la chaîne d'acquisition des données : les systèmes radar et sonar. Un rapide historique de ces deux technologies est présenté ainsi que leurs domaines d'application. Nous avons besoin d'introduire le formalisme électromagnétique utilisé en radar, fondé sur les équations de Maxwell, pour la compréhension du chapitre 4.

La théorie des probabilités est souvent utilisée en analyse de données et en traitement du signal pour caractériser des phénomènes et variables aléatoires. Elle s'appuie sur la notion de

variable aléatoire, qui correspond au résultat d’une expérience aléatoire. L’ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire constitue l’espace des réalisations. Une variable aléatoire est dite discrète lorsque l’espace des réalisations est dénombrable ou dite continue lorsque l’espace des réalisations est indénombrable. Dans le cadre de notre travail, les phénomènes aléatoires observés sont continus et par conséquent les définitions présentées ci-dessous font référence à des variables aléatoires continues. Ces phénomènes aléatoires peuvent être mis sous forme intégrale, on parle alors de densité de probabilité. Il existe un large choix de lois de probabilité, dont voici une liste non-exhaustive que nous présentons dans la suite du chapitre : Gaussienne, Weibull, Rayleigh, Gamma et  $\mathcal{K}$ . En règle générale, il est difficile de choisir une loi de probabilité dont est issu un échantillon de données. En statistiques, il existe des tests d’hypothèses utilisés pour déterminer si un échantillon suit bien une loi donnée connue. Dans la suite, nous présenterons les deux principaux tests statistiques : le test du  $\chi^2$  et le test de Kolmogorov-Smirnov.

Au cours de ce chapitre, nous présentons dans un premier temps les systèmes d’acquisition des données en milieu maritime. Nous développons plus particulièrement le sonar et le radar en rappelant un historique de ces systèmes, leurs modes de fonctionnement ainsi que leurs domaines d’application. Les données issues des systèmes d’acquisition ont la particularité d’être aléatoire. Le traitement et l’analyse de telles données est possible grâce à la théorie des probabilités. Par conséquent, dans la seconde partie de ce chapitre, nous introduisons différentes définitions utilisées en théorie des probabilités telles que la densité de probabilité, la fonction de répartition... Nous donnons aussi une liste non-exhaustive de lois de probabilité couramment utilisées en traitement du signal. Enfin, nous présentons les tests statistiques permettant d’évaluer la correspondance entre distributions observées et théoriques.

## 1.2 Systèmes d’acquisition

Dans cette partie, nous présentons les systèmes permettant d’acquérir les données et signaux en environnement maritime : le système sonar et le système radar.

### 1.2.1 Systèmes acoustiques

#### 1.2.1.1 Historique

Les premières expériences de l’acoustique sous-marine ont été menées bien avant l’existence du radar par le physicien suisse Jean-Daniel Colladon et le mathématicien français Charles-François Sturm [42]. Leur expérience a été réalisée en 1826 sur le lac Léman (illustrée par la Figure 1.1, gravure provenant de “Les phénomènes de la physique” par Amédée Guillemin, édition Hachette, Paris, 1868). Ils se trouvent chacun dans un bateau distancé de 13 km. Sur l’un des bateaux est suspendu une cloche en bronze frappée par un marteau articulé. À chaque coup de cloche, le manche du marteau va allumer une masse de poudre. L’observateur placé dans l’autre bateau est muni d’un cornet acoustique dont le pavillon est dirigé vers l’autre bateau. L’expérience se déroule de nuit afin de pouvoir observer le feu indiquant le départ de l’onde.

Le début de la première guerre mondiale voit la naissance de la première application des ondes acoustiques : la lutte anti-sous-marine. Cependant, la détection reste passive (écoute d’un son). Langevin imagine une détection active, c’est-à-dire que le système envoie un son et l’on reçoit l’écho du son renvoyé par un obstacle. Ce système est fondé sur les travaux de Curie sur les matériaux piézoélectriques. L’acoustique sous-marine prend réellement son essor avec la seconde guerre mondiale notamment pour traquer les U-boot allemands avec la mise au point des sonars à balayage latéral par les ingénieurs de l’ASDIC (Anti Submarine Detection Investigation Committee).

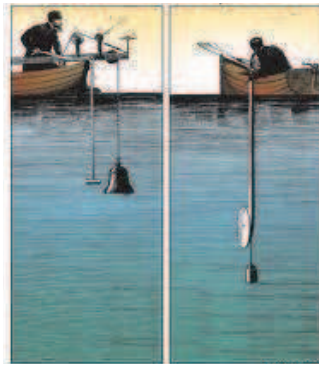


FIGURE 1.1 – Illustration de l'expérience de Colladon et Sturm réalisée sur le lac Léman.

Après l'armistice de 1945, le monde entra dans une période dite de guerre froide entre l'Ouest et l'Union Soviétique. Cette période est marquée par une course à l'armement. Le développement des sous-marins nucléaires a nécessité l'amélioration des technologies existantes. Les américains prennent alors un léger avantage avec leur système sonar (SOund NAvigation and Ranging).

Les techniques d'imagerie apparurent conjointement avec l'utilisation de signaux rétrodiffusés par un sonar latéral. Les premières images étaient bruitées et avec une mauvaise résolution. Dans les années 70 apparaissent les sondeurs multifaisceaux permettant de réaliser une cartographie des fonds marins.

Aujourd'hui, les ondes acoustiques sont utilisées pour détecter les bancs de poissons, pour effectuer de la recherche pétrolière ou pour mesurer la température de l'eau à l'échelle mondiale (climatologie) [140]. Toutes ces applications civiles sont intéressantes, mais en quittant le domaine militaire, cette discipline a perdu les moyens financiers et humains.

#### 1.2.1.2 Systèmes et technologies de traitement

Le sonar permet de détecter ou localiser une cible ou un objet immergé. Il existe deux principes de fonctionnement pour le système sonar [140] :

- le sonar actif émet un signal et reçoit l'écho du signal émis par une cible
- le sonar passif reçoit le bruit rayonné par une cible.

Plusieurs technologies [140] ont été développées permettant de travailler avec un signal brut de l'écho ou une image issue du traitement de ce signal brut de l'écho :

- le sonar à balayage latéral (ou par abus de langage sonar latéral) est un système acoustique de haute définition permettant d'obtenir une image en niveau de gris et en continue du fond marin. Le sonar latéral permet d'insonifier à différentes fréquences, et perpendiculairement à la trajectoire du navire, une bande constante de 50 à 1000 m de largeur en fonction de la profondeur. Le sonar latéral est notamment utilisé pour la pêche, la cartographie d'herbiers de posédonie, la détermination des fonds marins, la détection de mines sous-marines ...
- Les sondeurs monofaisceaux sont parmi les sondeurs les plus couramment utilisés. Une onde acoustique va être émise par un transducteur à large ouverture angulaire latérale (plus de  $30^\circ$ ). Ce même transducteur va alors détecter l'écho du fond. Il est alors possible de déterminer le profil bathymétrique à l'aide du temps de parcours entre l'onde et le fond ainsi que la célérité de l'onde dans l'eau.
- les sondeurs multifaisceaux sont des systèmes acoustiques sous-marins installés sous la coque du navire. L'avantage de tels sondeurs est qu'il est possible en un seul passage de réaliser la topographie sous-marine sur plusieurs kilomètres de large. Les sondeurs multifaisceaux permettent de sonder sur toute une fauchée perpendiculaire à l'axe du



bateau, et non uniquement à la verticale du bateau comme le fait le sondeur monofaisceau. Les sondeurs multifaisceaux sont fondés sur la technique dite des faisceaux croisés, c'est-à-dire que l'émission de l'onde acoustique et la réception de l'écho réfléchi s'effectuent sur le fond, selon des faisceaux perpendiculaires dont l'intersection présente la surface sondée.

## 1.2.2 Systèmes micro-ondes

### 1.2.2.1 Historique

L'invention du radar n'est pas le fruit d'un seul homme ou d'une seule nation. Le radar est le résultat de l'accumulation de nombreuses recherches auxquelles ont participé plusieurs scientifiques de différents pays. Cependant, il existe des repères qu'il convient de mentionner.

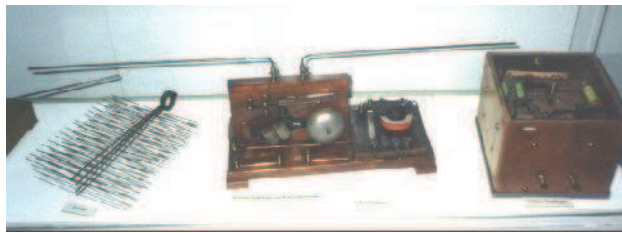


FIGURE 1.2 – Telemobiloskop exposé au musée de Munich.

En 1865, le physicien anglais Maxwell développe sa théorie de l'électromagnétisme en décrivant l'onde électromagnétique ainsi que sa propagation [119]. En 1886, le physicien allemand Hertz démontre l'existence physique des ondes électromagnétiques et confirme ainsi la théorie de Maxwell. Le technicien allemand Hülsmeier pose le brevet du *Telemobiloskop* [47] en 1904 (illustré par la Figure 1.2). Cet appareil est alors utilisé pour la prévention de collision de bateaux en mer lors d'un épais brouillard. Hülsmeier calcule alors le temps de parcours de l'onde électromagnétique, sur le trajet aller-retour, entre l'antenne et le navire métallique. En 1922, Taylor et Young, chercheurs au Naval Research Laboratory, arrivent à détecter pour la première fois un navire en bois. Hygland réalise en 1922 la première détection d'un aéronef. À la veille de la seconde guerre mondiale, différentes technologies radar existent. Elles sont développées par les États-Unis, la France le Royaume-Uni, l'Allemagne, la Russie et le Japon. Les britanniques ont notamment élaboré un système radar afin de surveiller leurs côtes. Les technologies radar vont être considérablement améliorées durant la seconde guerre mondiale.

À la sortie de la seconde guerre mondiale, le radar trouve sa place dans le domaine civil avec notamment le contrôle aérien, la météorologie ou l'imagerie terrestre. La surveillance maritime n'a été possible qu'à la découverte du radar à imagerie.

### 1.2.2.2 Systèmes et technologies de traitement

Le principe du radar est simple : il s'agit d'émettre une onde électromagnétique vers une cible. Cette cible va alors à son tour réfléchir ce signal via un écho. Cet écho va alors être capté par un récepteur. Il est alors possible de mesurer la position de l'objet grâce au temps de trajet aller-retour ainsi que la vitesse de l'objet à partir du changement de fréquence du signal par effet Doppler.

Il existe deux grandes familles de radar :

- les radars imageurs qui permettent de disposer d'images de zone d'intérêt (en présence d'objets) comme par exemple le radar à synthèse d'ouverture (noté RSO ou aussi SAR pour *Synthetic Aperture Radar* en anglais)



- les radars non-imageurs qui permettent d'estimer ou d'observer les propriétés d'une zone ou d'un objet comme par exemple le radio altimètre.

Le système radar peut fonctionner en configuration dite :

- monostatique, c'est-à-dire que l'émetteur et le récepteur sont confondus.
- bistatique, c'est-à-dire que l'émetteur et le récepteur sont disjoints.

L'avantage d'un système monostatique est qu'on limite l'encombrement et les problèmes de synchronisation puisque l'électronique et l'antenne sont partagés entre émission et réception. Par contre, le problème est que ce système est facilement détectable par un appareil ennemi par rapport au système bistatique et/ou multistatique. De plus, le système bistatique a une plus grande souplesse de configuration et donc permet d'augmenter le nombre d'informations sur la cible.

### 1.2.2.3 Formalisme électromagnétique

Précédemment, nous avons exposé un historique du système radar. Il est important de comprendre que cette technologie est issue de phénomènes physiques. Les phénomènes électromagnétiques ont été traduits sous forme d'équations par Maxwell. Le but de cette section est d'introduire notamment les grandeurs physiques définies dans les équations de Maxwell, ainsi que la notion de polarisation de l'onde. Les définitions de bilan de liaison et surface équivalente radar, essentielles dans la notion de fouillis de mer, sont aussi abordées. Le formalisme développé ci-dessous est nécessaire à la compréhension du chapitre 4.

#### 1.2.2.3.a Équations de Maxwell

En 1865, Maxwell développe la théorie de l'électromagnétisme en décrivant l'onde électromagnétique ainsi que sa propagation. Les lois de l'électromagnétisme ont été proposées par Maxwell vers 1865. Il reprend les lois expérimentales découvertes en électrostatique et magnétisme pour en faire une synthèse sous forme d'équations locales. Ces équations ont été traduites sous forme vectorielle par Heaviside. Les équations de Maxwell sous forme locale [23] sont définies par :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.3)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

avec :

- $\rho$  représente la densité volumique de charge (en C/m<sup>3</sup>).
- $\mathbf{J}$  le vecteur densité de courant (en A/m<sup>2</sup>).
- $\mathbf{E}$  le vecteur champ électrique (en V/m).
- $\mathbf{B}$  le vecteur champ magnétique (en A/m).
- $\epsilon$  la permittivité du milieu (en F/m)
- $\mu$  la perméabilité du milieu (en H/m).

Les équations (1.1) et (1.2) sont valables quelque soit le milieu considéré tandis que les équations (1.3) et (1.4) dépendent du milieu considéré. L'équation (1.1) est appelée équation relative au flux magnétique. L'équation (1.2) est appelée équation de Maxwell-Faraday. L'équation (1.3) est appelée équation de Maxwell-Gauss dont découle le théorème de Gauss (sous forme intégrale). L'équation (1.4) est appelée équation de Maxwell-Ampère dont découle le théorème d'Ampère

(sous forme intégrale). Il est possible d'exprimer la permittivité et la perméabilité du milieu à partir de leurs valeurs dans le vide par :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (1.5)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (1.6)$$

avec :

- $\epsilon_r$  la permittivité relative du milieu
- $\epsilon_0$  la permittivité relative du vide
- $\mu_r$  la perméabilité relative du milieu
- $\mu_0$  la perméabilité relative du vide

Il faut noter que dans le vide  $\epsilon_r = 1$  et  $\mu_r = 1$ .

Dans le cas particulier où il n'y a pas de charge (milieu non conducteur avec  $\rho = 0$  et  $\mathbf{J} = 0$ ), il est possible de montrer que le champ électrique  $\mathbf{E}$  vérifie l'équation :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

$\nabla^2$  correspond à l'opérateur laplacien.

#### 1.2.2.3.b Polarisation de l'onde

Dans le cas d'une onde plane monochromatique se propageant vers l'axe ( $Oz$ ) vers les  $z$  croissants (progressive suivant l'axe ( $0z$ )), le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} |E_x| \cos(wt - kz + \delta_x) \\ |E_y| \cos(wt - kz + \delta_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le vecteur d'onde (le produit scalaire  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = z$  car  $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ k]$ ).

Une onde plane est caractérisée par le fait que les fronts d'onde sont des plans infinis, perpendiculaires à la direction de propagation. L'équation (1.7) peut alors être simplifiée sous le nom d'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \mu\epsilon w^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

Il est important de noter que les caractéristiques du champ électrique (amplitude et phase) varie en fonction du milieu de propagation.

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant le temps :

$$\cos^2(wt - kz) + \sin^2(wt - kz) = 1 \quad (1.10)$$

$$\left( \left( \frac{E_x}{|E_x|} \sin(\delta_y) - \frac{E_y}{|E_y|} \sin(\delta_x) \right) \frac{1}{\sin(\delta)} \right)^2 + \left( \left( \frac{E_x}{|E_x|} \cos(\delta_y) - \frac{E_y}{|E_y|} \cos(\delta_x) \right) \frac{1}{\sin(\delta)} \right)^2 = 1 \quad (1.11)$$

Après simplification, nous avons :

$$\frac{E_x^2}{|E_x|^2} + \frac{E_y^2}{|E_y|^2} - \frac{2E_x E_y}{|E_x||E_y|} \cos(\delta) = \sin^2(\delta) \quad (1.12)$$

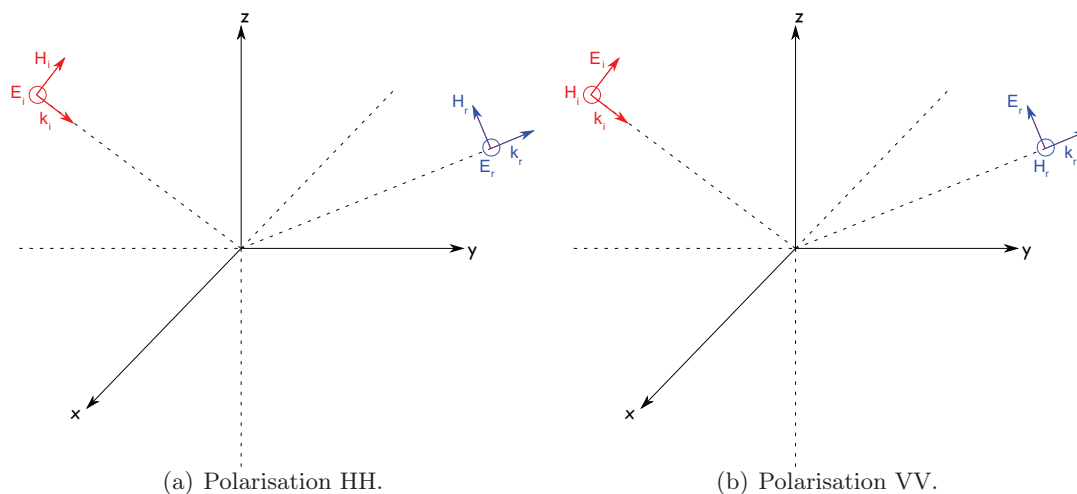


FIGURE 1.3 – Exemple de polarisation en émission et en réception.

avec  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . L'équation (1.12) correspond à l'équation d'une ellipse. L'ellipse est totalement caractérisée par le couple d'angles  $(\psi, \tau)$  (Figure 1.4). L'angle noté  $\psi$  entre l'horizontale et le grand axe de l'ellipse est appelé angle d'orientation de l'ellipse et est compris entre  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . L'angle noté  $\tau$  caractérise l'ellipticité, vérifie la relation  $\tan(\tau) = |E_y|/|E_x|$  et appartient à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ . L'onde électromagnétique polarisée elliptiquement est lévogyre ou polarisée elliptiquement à gauche (resp. dextogyre ou polarisée elliptiquement à droite) si le champ tourne dans le sens trigonométrique direct (resp. rétrograde) pour un observateur qui voit l'onde arriver vers lui. L'onde est dite polarisée horizontale (resp. verticale) si l'angle  $\tau = 0$  et  $\psi = 0$  (resp.  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ). L'onde est dite polarisée circulairement gauche (resp. droite) si  $\tau = +\frac{\pi}{4}$  ou  $\tau = -\frac{\pi}{4}$  et  $\psi = -\frac{\pi}{4}$  (resp.  $\psi = \frac{\pi}{4}$ ).

Dans notre étude, nous supposons que notre onde est polarisée horizontalement ou verticalement. La polarisation horizontale, notée polarisation H, est aussi appelée transverse électrique ou perpendiculaire. De même, la polarisation verticale, notée polarisation V, est aussi appelée polarisation transverse magnétique ou parallèle.

En général, on s'assure d'avoir la même polarisation en émission et en réception : on parle alors de polarisation directe (*co-polarization* en anglais). Cependant, il est possible de travailler en polarisation croisée (*cross-polarization* en anglais) mais ce mode de fonctionnement a pour effet d'avoir une perte importante en dB. On préfère utiliser une forme matricielle pour représenter l'état de polarisation.

### 1.2.2.3.c Bilan de liaison

On considère un radar en configuration bistatique. Lorsque l'antenne émettrice génère une onde, l'antenne réceptrice ne reçoit pas la même puissance. En effet, la cible ne va diffuser qu'une petite partie de l'onde émise qui plus est dans des directions différentes. Le bilan de puissance est alors définie à partir de l'équation radar :

$$P_r = P_e \frac{G_r G_e \lambda^2 \sigma_{pq}^s}{(4\pi)^2 R_e^2 R_r^2}, \quad (1.13)$$

avec  $P_r$  (resp.  $P_e$ ) la puissance reçue (resp. émise),  $G_r$  (resp.  $G_e$ ) le gain de l'antenne receptrice (resp. émettrice),  $R_r$  (resp.  $R_e$ ) la distance entre la cible et le récepteur (resp. distance entre la cible et l'émetteur),  $\lambda$  la longueur d'onde du radar et  $\sigma_{pq}^s$  la surface équivalente radar avec  $p$  (resp.

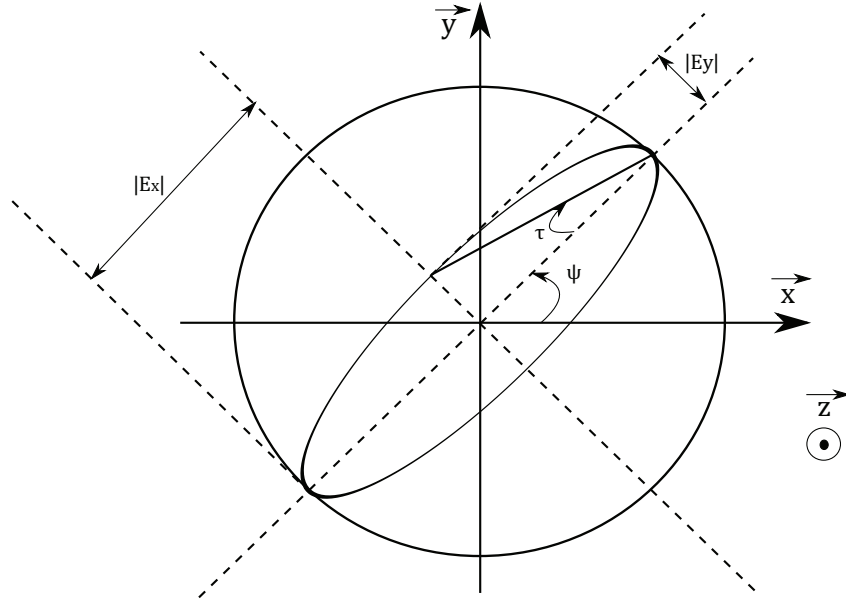


FIGURE 1.4 – Ellipse de polarisation.

$q$ ) la polarisation de l'onde diffusée (resp. incidente). L'un des objectifs va être de calculer la valeur de la surface équivalente radar. La surface équivalente radar quantifie le pouvoir réflecteur de la cible. Elle dépend de plusieurs facteurs :

- la polarisation de l'onde émise et diffusée.
- la forme de l'objet.
- la longueur d'onde du radar.
- la matière constituant la cible.
- la position de l'objet déterminé par la distance et l'angle entre le radar et la cible.

La surface équivalente radar peut être définie de la manière suivante [158] :

$$\sigma_{pq}^s = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E^s(r)|^2}{|E^i|^2}, \quad (1.14)$$

avec  $E^i$  le champ électrique incident et  $E^s$  le champ électrique réfléchi. La limite suppose que l'on travaille en champ lointain et par conséquent que l'onde est supposée plane.

Cette première partie permet d'exposer les différents systèmes d'acquisition utilisés en environnement maritime. L'objectif de la partie suivante est d'introduire la théorie des probabilités permettant de caractériser les données issues de capteurs.

## 1.3 Théorie des probabilités

L'objectif de cette section est de développer les principes fondamentaux statistiques des lois continues utilisées pour modéliser des phénomènes aléatoires et qui sont utiles par la suite [192].

### 1.3.1 Définitions

La théorie mathématique des probabilités a été introduite au xvi<sup>ième</sup> siècle par Cardano puis reprise par Fermat et Pascal au xvii<sup>ième</sup> siècle permettant de résoudre les jeux de hasard. Par exemple, il est possible de se demander quelle est la probabilité de tirer le même numéro sur trois

lancés de dés à six faces ? Les résultats possibles appartiennent à l'ensemble  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . L'ensemble  $\Omega$  est appelé espace des réalisations et un élément  $w \in \Omega$  tel que  $|w| = 1$  est appelé événement élémentaire. Lors d'une expérience aléatoire, un événement est choisi parmi un ensemble d'événement  $\mathcal{A}$ , où  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble des parties de  $\Omega$ . L'ensemble des parties de  $\Omega$  est noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ . Par exemple, si  $\Omega = \{a, b, c\}$ , l'ensemble des parties de  $\Omega$  est constitué de  $2^{|\Omega|}$  éléments avec  $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, a, b, c, (a, b), (a, c), (b, c), \Omega\}$ . Il est possible de traiter des problèmes en considérant un sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\Omega$ . La définition axiomatique d'une loi de probabilité  $\mathbb{P}$  a été proposée par Kolmogorov sous forme de 3 axiomes :

$$\begin{aligned} 1) & \forall A \subseteq \Omega, \mathbb{P}(A) \geq 0 \\ 2) & \mathbb{P}(\Omega) = 1 \\ 3) & \text{Si } A \cap B = \emptyset, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Lorsque l'espace des réalisations est continu, il devient plus difficile de dénombrer l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Cependant, la notion de tribu permet de le réaliser.

**Définition 1.3.1** (Tribus). Un ensemble  $\mathcal{A}$  de parties de  $\Omega$  ( $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ) est une tribu si :

$$\begin{aligned} 1) & \Omega \in \mathcal{A} \\ 2) & \text{Si } A \in \mathcal{A}, \text{ alors le complémentaire } \Omega/A \in \mathcal{A} \\ 3) & \text{Si l'on dispose d'une suite } A_1, \dots, A_n \text{ d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors l'union } \cup A_i \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (1.16)$$

La tribu sur  $\mathbb{R}$ , appelée aussi tribu des boréliens, est la tribu engendrée par des intervalles de  $\mathbb{R}$ . Le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  est appelé espace mesurable.

**Définition 1.3.2** (Espace de probabilité). Un espace de probabilité est un triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur  $\mathcal{A}$

**Définition 1.3.3** (Mesure). Une mesure  $\mu$  est une mesure sur une tribu  $\mathcal{A}$  tel que :

$$\begin{aligned} 1) & \mu(A) \geq 0 \\ 2) & \text{Si } \forall i, o \in \mathcal{N}, A_i \cap A_o = \emptyset, \text{ alors } \mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i) \\ 3) & \exists A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) < +\infty \end{aligned} \quad (1.17)$$

**Définition 1.3.4.** Lorsque l'espace des réalisations est  $\mathbb{R}$ , on parle de variable aléatoire continue.

**Définition 1.3.5.** La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , notée  $F_X$  est définie par :

$$F_X: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1] \\ x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases} \quad (1.18)$$

continue à droite et vérifiant les conditions aux limites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad (1.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \quad (1.20)$$

**Définition 1.3.6.** Une variable aléatoire est dite à densité si sa fonction de répartition est dérivable. La fonction de densité appelée plus communément fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$ , notée  $f_X$  vaut :

$$f_X: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F'_X(x) \end{cases} \quad (1.21)$$

Lorsque la fonction de densité de probabilité est intégrable, on obtient les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0 \quad (1.22)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (1.23)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (1.24)$$

**Définition 1.3.7.** L'espérance mathématique d'une variable aléatoire à densité  $X$  est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (1.25)$$

L'espérance est appelée aussi moment d'ordre 1.

**Définition 1.3.8.** Il est possible d'estimer les moments à des ordres supérieurs à 1. Un moment d'ordre  $k$  noté  $\mathbb{M}_k$  est définie par :

$$\mathbb{M}_k(X) = \mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx \quad (1.26)$$

**Définition 1.3.9.** La fonction caractéristique d'une variable aléatoire  $X$ , notée  $\phi_X$ , est obtenue à partir de la relation :

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[\exp(juX)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \exp(jux) dx \quad (1.27)$$

Il est possible d'obtenir la fonction de densité de probabilité en calculant la transformée de Fourier de sa fonction caractéristique :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(u) \exp(-jux) du \quad (1.28)$$

**Définition 1.3.10.** Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  défini par une fonction de densité conjointe  $f_{X,Y}(x, y)$ . Les fonctions de densités marginales sont définies par :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy \quad (1.29)$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \quad (1.30)$$

**Définition 1.3.11.** Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  défini par une fonction de densité conjointe  $f_{X,Y}(x, y)$ . Les lois conditionnelles sont obtenues par :

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (1.31)$$

**Définition 1.3.12.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes si leurs lois marginales sont égales à leurs lois conditionnelles.

**Propriété 1.3.1.** Lorsque deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a la relation :

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (1.32)$$

**Propriété 1.3.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à densité tel que  $Y = g(X)$ , avec  $g$  bijective et dérivable. La densité de probabilité  $f_Y(y)$  est déterminée par la relation :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} \quad (1.33)$$

### 1.3.2 Quelques lois continues

Nous proposons ci-dessous une liste non-exhaustive de lois continues couramment utilisées en statistique. Elles ont la particularité d'être unimodales.

*Remarque 1.3.1.* Il est important de noter que les lois ayant pour support  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  sont généralisables sur  $\mathbb{R}$  par un changement de variable  $y = x - \delta$ .

#### 1.3.2.1 Loi Gaussienne

La loi normale a été découverte par de Moivre en 1733 comme étant la limite d'une loi binomiale. Cependant, Gauss formalisa mathématiquement cette loi. On la retrouve comme modèle pour les distributions d'erreurs de mesure autour d'une valeur vraie. On dit que  $X$  suit une loi normale ou Gaussienne de paramètre  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$  (*c.f.* Figure 1.5(a)), notée  $X \sim \mathcal{N}(\delta, \sigma^2)$ , si elle admet une densité de probabilité de la forme :

$$f_{\mathcal{N}(\delta, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\delta}{\sigma}\right)^2\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.34)$$

Le paramètre  $\delta$  est appelé la moyenne et le paramètre  $\sigma$  l'écart-type (on peut parler de variance avec  $\sigma^2$ ).

La fonction de répartition d'une variable aléatoire Gaussienne  $X \sim \mathcal{N}(\delta, \sigma^2)$  (*c.f.* Figure 1.5(b)) est définie par :

$$F_{\mathcal{N}(\delta, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.35)$$

avec  $\operatorname{erf}$  correspondant à la fonction erreur de Gauss :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\zeta^2) d\zeta \quad (1.36)$$

Un estimateur de la moyenne et de la variance à partir d'un vecteur échantillon  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  est donné par :

$$\hat{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.37)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\delta})^2 \quad (1.38)$$

#### 1.3.2.2 Loi de Weibull

La loi de Weibull a été introduite par Waloddi Weibull [229]. Elle est très souvent utilisée pour modéliser des durées de vie.

On dit que  $X$  suit une loi de Weibull de paramètre  $\lambda_W \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $k_W \in \mathbb{R}^{+*}$ , notée  $\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)$ , si sa densité de probabilité (*c.f.* Figure 1.6(a)) est déterminée par la relation :

$$f_{\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)}(x) = \begin{cases} \frac{k_W}{\lambda_W} \left(\frac{x}{\lambda_W}\right)^{(k_W-1)} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda_W}\right)^{k_W}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.39)$$

avec  $\lambda_W$  appelée le paramètre d'échelle et  $k_W$  le paramètre de forme.

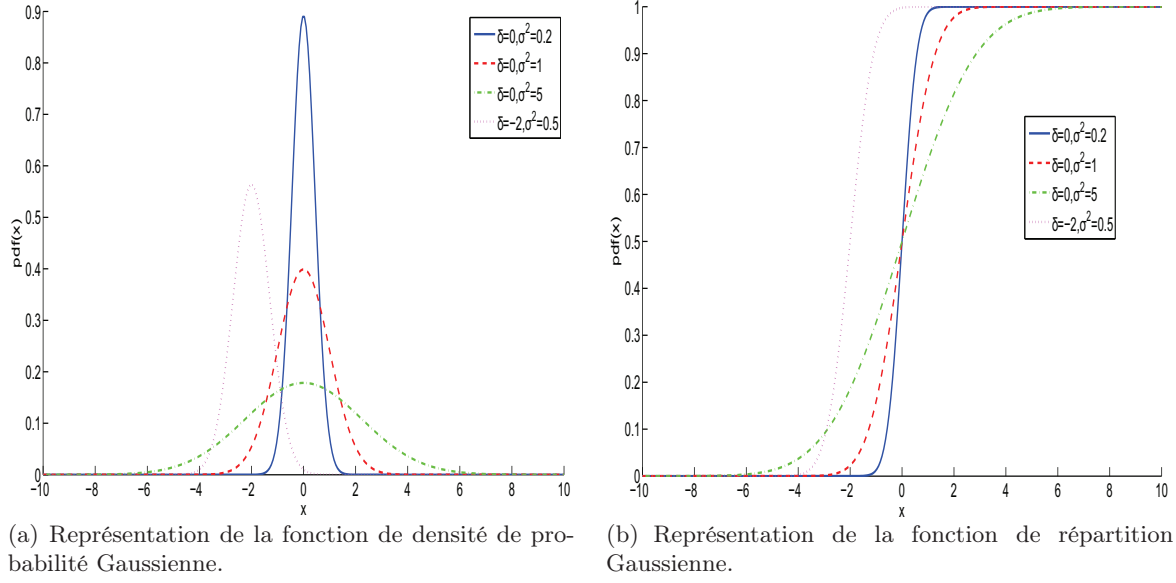


FIGURE 1.5 – Influence des paramètres de la loi normale sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire de Weibull  $X \sim \mathcal{W}(\lambda_W, k_W)$  (c.f. Figure 1.6(b)) a pour expression :

$$F_{\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda_W}\right)^{k_W}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.40)$$

La distribution de Weibull a notamment été utilisée pour modéliser les échos parasites réfléchies par la mer appelés aussi fouillis de mer [75] (on peut parler aussi de clutter de mer), le fouillis terrestre [74, 196] et le fouillis de glace [30].

Il est possible d'estimer les paramètres de la loi de Weibull à partir d'un maximum de vraisemblance.

### 1.3.2.3 Loi de Rayleigh

La loi de Rayleigh apparaît souvent pour décrire le bruit de certains récepteurs de transmission. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Rayleigh de paramètre  $\sigma_R \in \mathbb{R}^{+*}$ , notée  $X \sim \mathcal{R}(\sigma_R)$ , si sa densité de probabilité (c.f. Figure 1.7(a)) s'écrit sous la forme :

$$f_{\mathcal{R}(\sigma_R)}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_R^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.41)$$

Un estimateur du paramètre  $\sigma_R$  :

$$\hat{\sigma}_R = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (1.42)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire de Rayleigh  $X \sim \mathcal{R}(\sigma_R)$  (c.f. Figure 1.7(b))



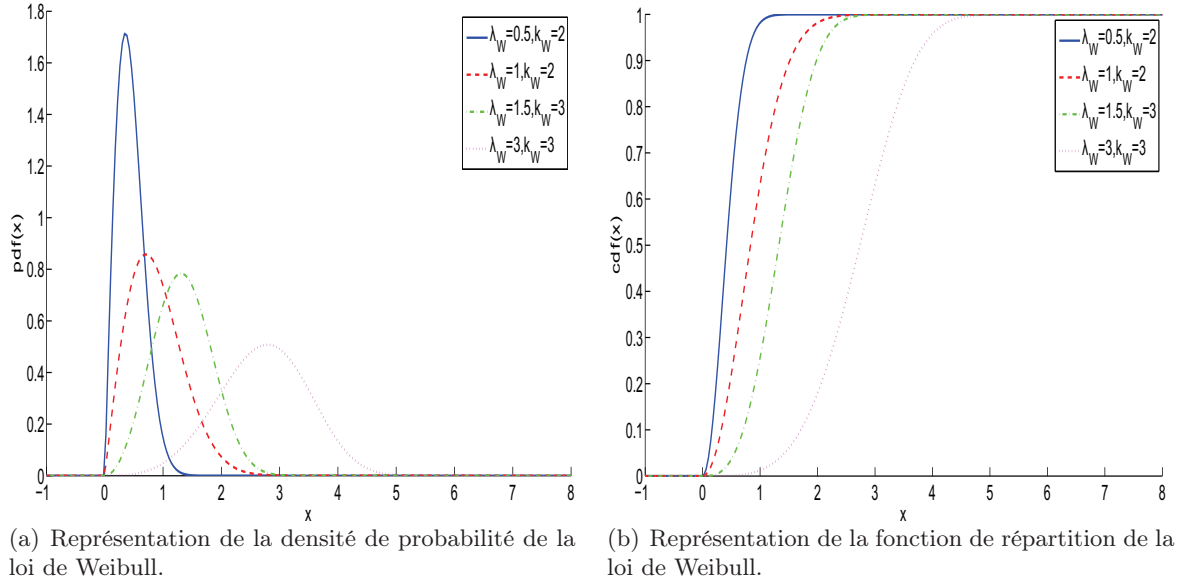


FIGURE 1.6 – Influence des paramètres de la loi de Weibull sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

est obtenue par :

$$F_{\mathcal{R}(\sigma_R)}(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_R^2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.43)$$

### 1.3.2.4 Loi exponentielle

La loi exponentielle est très souvent utilisée pour modéliser la loi de la durée de vie d'un atome radioactif ainsi que les risques de panne. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\alpha_E \in \mathbb{R}^{+*}$ , notée aussi  $X \sim \mathcal{E}(\alpha_E)$ , si sa fonction de probabilité s'écrit :

$$f_{\mathcal{E}(\alpha_E)}(x) = \begin{cases} \alpha_E \exp(-\alpha_E x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.44)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle  $X \sim \mathcal{E}(\alpha_E)$  est définie par :

$$F_{\mathcal{E}(\alpha_E)}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha_E x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.45)$$

L'espérance et l'écart-type d'une loi exponentielle sont égaux et valent  $1/\alpha_E$ .

### 1.3.2.5 Loi gamma

La loi gamma est utilisée comme loi de probabilité pour prévoir la durée de vie des appareils qui subissent une usure. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi gamma de paramètre  $\alpha_G \in \mathbb{R}$  et  $\beta_G \in \mathbb{R}$ , notée aussi  $X \sim \mathcal{G}(\alpha_G, \beta_G)$ , si sa fonction de probabilité (*c.f.* Figure 1.9(a)) s'écrit :

$$f_{\mathcal{G}(\alpha_G, \beta_G)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_G^{\alpha_G} \Gamma(\alpha_G)} x^{\alpha_G-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta_G}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.46)$$

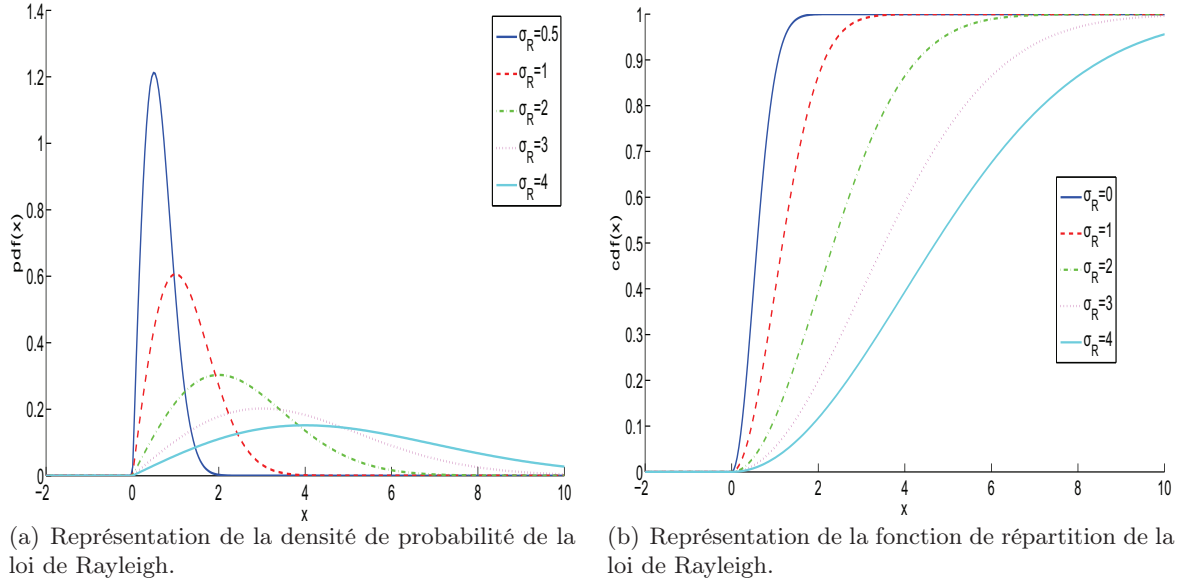


FIGURE 1.7 – Influence des paramètres de la loi de Rayleigh sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

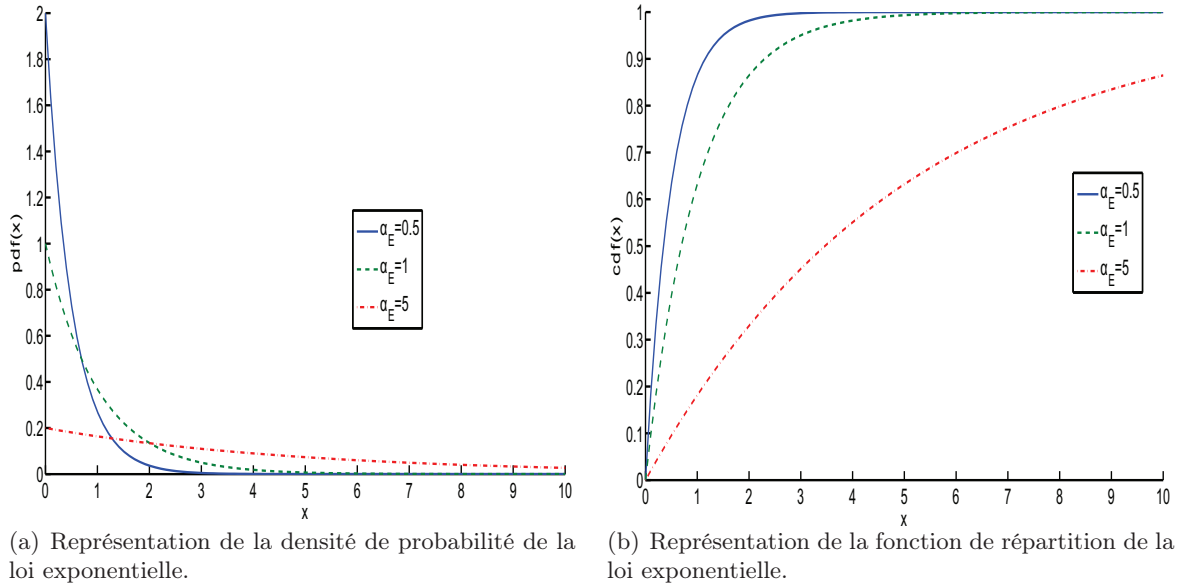


FIGURE 1.8 – Influence des paramètres de la loi exponentielle sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

avec  $\Gamma$  représentant la fonction d'Euler.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire d'une loi gamma  $X \sim \mathcal{G}(\alpha_G, \beta_G)$  (c.f. Figure 1.7(b)) est définie par :

$$F_{\mathcal{G}(\alpha_G, \beta_G)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_G^{\alpha_G} \Gamma(\alpha_G)} \int_0^x t^{\alpha_G-1} \exp\left(-\frac{t}{\beta_G}\right) dt & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.47)$$

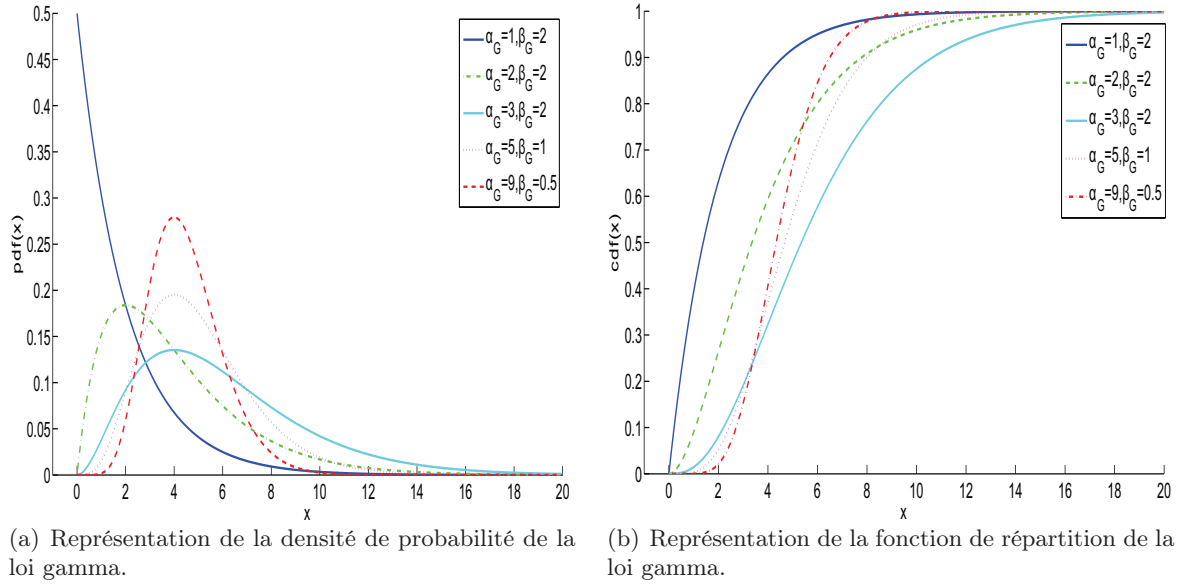


FIGURE 1.9 – Influence des paramètres de la loi de gamma sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

Il est possible d'estimer les paramètres de la loi gamma à partir de ses moments :

$$\mathbb{M}_1 = \alpha_G \beta_G \quad (1.48)$$

$$\mathbb{M}_2 = \alpha_G(\alpha_G + 1)\beta_G^2 \quad (1.49)$$

On aura alors :

$$\hat{\alpha}_G = \frac{\mathbb{M}_1^2}{\mathbb{M}_2 - \mathbb{M}_1^2} \quad (1.50)$$

$$\hat{\beta}_G = \frac{\mathbb{M}_2 - \mathbb{M}_1^2}{\mathbb{M}_1} \quad (1.51)$$

Lorsque  $\alpha_G$  est entier, la quantité  $\Gamma(\alpha_G) = (\alpha_G - 1)!$ . La loi Gamma  $\mathcal{G}$  est alors une somme de  $\alpha_G$  variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre  $\beta_G$ , plus connue sous le nom de loi d'Erlang.

### 1.3.2.6 Loi $\mathcal{K}$

La loi  $\mathcal{K}$  a été introduite par Jakeman et Pusey [105] pour décrire les statistiques de la diffusion issue de la surface de mer. Ce modèle suppose que le nombre de diffuseurs à l'intérieur d'une cellule de résolution est décrit par un processus aléatoire de naissance, mort et migration (*birth-death-migration process* en anglais). L'utilisation de la loi  $\mathcal{K}$  suggère plusieurs hypothèses. Le champ diffusé par la surface est la somme d'ondes réfléchies par plusieurs diffuseurs réparties dans une cellule de résolution. Les amplitudes et les phases de ces ondes réfléchies sont des variables aléatoires indépendantes. En supposant que la cellule de résolution est grande par rapport à la longueur d'onde, la phase est distribuée uniformément sur  $[0; 2\pi]$ . Ensuite, le nombre de diffuseurs à l'intérieur de la cellule de résolution est une variable aléatoire distribuée selon une loi binomiale négative de paramètre  $\alpha_B$ . On suppose ensuite que le nombre de diffuseurs est grand dans chaque cellule. Lorsque  $\alpha_B$  est infini, les diffuseurs sont supposés indépendants

entre eux, le nombre de diffuseurs suit une loi de Poisson. Le champ diffusé suit alors une loi de Rayleigh. Mathématiquement, une variable aléatoire  $X$  suit une loi  $\mathcal{K}$ , de paramètres  $\mu_{K_1} \in \mathbb{R}$  et  $\nu_{K_1} \in \mathbb{R}^{+*}$ , notée  $X \sim \mathcal{K}(\mu_{K_1}, \nu_{K_1})$ , si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$f_{\mathcal{K}(\mu_{K_1}, \nu_{K_1})}(x) = \begin{cases} \frac{2\mu_{K_1}}{\Gamma(\nu_{K_1})} \left(\frac{\mu_{K_1}x}{2}\right)^{\nu_{K_1}} K_{\nu_{K_1}-1}(\mu_{K_1}x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.52)$$

avec  $\mu_{K_1}$  le facteur d'échelle,  $\nu_{K_1}$  le paramètre de forme (et aussi le paramètre de la loi binomiale) et  $K_{\nu_{K_1}-1}$  une fonction modifiée de Bessel de seconde espèce d'ordre  $\nu_{K_1} - 1$  [1]. En résumé, cette loi a été introduite pour représenter l'amplitude statistique du fouillis de mer [106].

À noter qu'il est possible de trouver d'autres paramétrisations pour la loi  $\mathcal{K}$  impliquant 3 paramètres [14], aussi appelée loi  $\mathcal{K}$  généralisée. Une variable aléatoire  $X$  suit une loi  $\mathcal{K}$  généralisée, de paramètres  $\mu_K \in \mathbb{R}$ ,  $\nu_K \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $L \in \mathbb{R}^{+*}$ , notée  $X \sim \mathcal{K}(\mu_K, \nu_K, L)$ , si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$f_{\mathcal{K}(\mu_K, \nu_K, L)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} \left(\frac{L\nu_K x}{\mu_K}\right)^{\frac{L+\nu_K}{2}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(\nu_K)} K_{\nu_K-L}\left(2\sqrt{\frac{L\nu_K x}{\mu_K}}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.53)$$

avec  $K_{\nu_K-L}$  une fonction modifiée de Bessel de seconde espèce d'ordre  $\nu_K - L$  [1].

Cette loi est notamment utilisée en imagerie [227]. En effet, les données brutes doivent avoir un traitement différent suivant les échelles de représentation utilisées pour constituer l'image. En général, on enregistre les données brutes à une résolution spatiale constante fixée par l'opérateur. Lorsque la taille du pixel de l'image excède cette résolution spatiale, la réflectivité associée à un pixel de l'image correspond au moyennage des réflectivités des  $L$  données brutes situées à l'intérieur du pixel. En imagerie SAR, la quantité  $L$  est appelée le nombre de *looks*.

*Remarque 1.3.2.* Une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi  $\mathcal{K}$  généralisée est obtenue par le produit de deux variables aléatoires, l'une étant une distribution gamma de moyenne 1 et de paramètre de forme  $L$ , l'autre une distribution gamma de moyenne  $\mu_K$  et de paramètre de forme  $\nu_K$ .

*Remarque 1.3.3.* Il est possible de réécrire l'équation (1.52) de paramètres  $\nu_{K_2} > -1$  et  $\mu_{K_2} > 0$ , notée  $X \sim \mathcal{K}(\mu_{K_2}, \nu_{K_2})$  (*c.f.* Figure 1.10(a)) :

$$f_{\mathcal{K}(\mu_{K_2}, \nu_{K_2})}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\mu_{K_2}\Gamma(\nu_{K_2}+1)} \left(\frac{x}{2\mu_{K_2}}\right)^{\nu_{K_2}+1} K_{\nu_{K_2}}\left(\frac{x}{\mu_{K_2}}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.54)$$

Par la suite, nous utilisons cette paramétrisation. Le lien entre l'équation (1.52) et l'équation (1.53) est détaillé en Annexe A.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi  $\mathcal{K}$  (*c.f.* Figure 1.10(b)) est obtenue par :

$$F_{\mathcal{K}(\mu_{K_2}, \nu_{K_2})}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{\nu_{K_2}}\Gamma(\nu_{K_2}+1)} \left(\frac{x}{\mu_{K_2}}\right)^{\nu_{K_2}+1} K_{\nu_{K_2}+1}\left(\frac{x}{\mu_{K_2}}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.55)$$

La loi  $\mathcal{K}$  donnée par l'équation (1.52) ou l'équation (1.54) a été appelée par Ward *et al.* [225] comme la loi  $\mathcal{K}$  composée. La paramétrisation d'une variable aléatoire suivant une loi  $\mathcal{K}$  composée (*compound K-distribution* en anglais) de paramètres  $\nu_{K_c} > -1$  et  $\mu_{K_c} > 0$ , notée  $X \sim$

$\mathcal{K}(\mu_{Kc}, \nu_{Kc})$  :

$$f_{\mathcal{K}(\mu_{Kc}, \nu_{Kc})}(x) = \begin{cases} \frac{4}{\mu_{Kc} \Gamma(\nu_{Kc} + 1)} \left( \frac{x}{\mu_{Kc}} \right)^{\nu_{Kc} + 1} K_{\nu_{Kc}} \left( \frac{2x}{\mu_{Kc}} \right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.56)$$

Cette distribution a une justification physique. Elle est obtenue par le produit de deux composantes : une composante distribuée suivant une loi gamma modélisant les phénomènes de grandes échelles avec des variations lentes (vagues de gravité) et une composante distribuée suivant une loi de Rayleigh modélisant les phénomènes à variations rapides (vagues de capillarité). La composante modélisant les phénomènes à variations lentes est appelée modulation et la composante modélisant les phénomènes à variations rapides est appelée tavelure (*speckle* en anglais). Il est possible de relier ce modèle statistique au modèle composite à deux échelles, qui est une méthode asymptotique permettant de calculer la contribution des vagues de gravité et de capillarité dans le calcul du coefficient de diffusion [43].

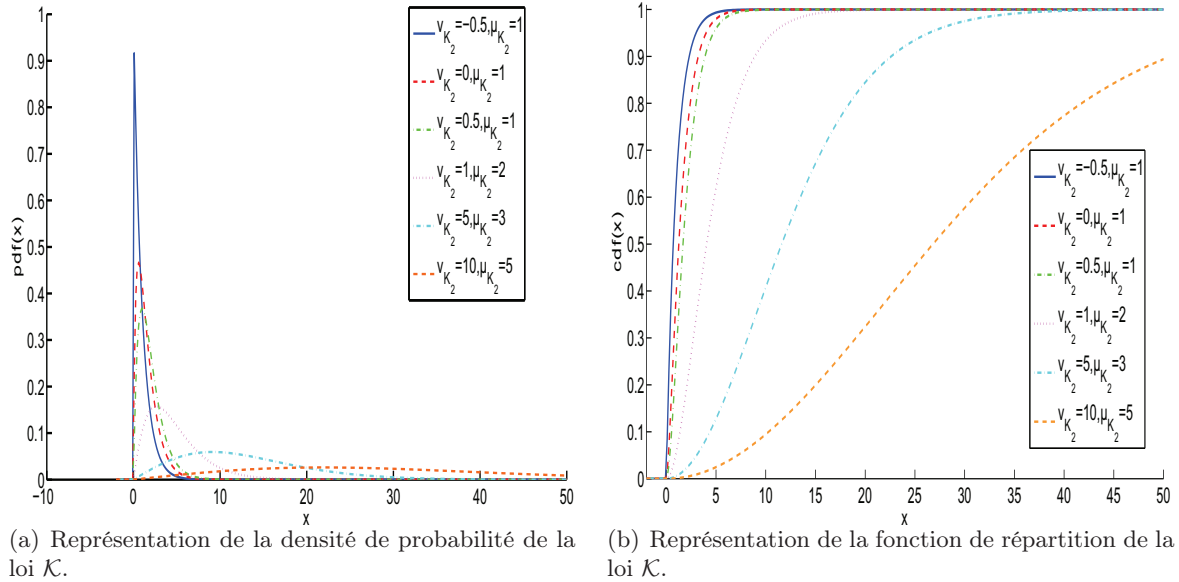


FIGURE 1.10 – Influence des paramètres de la loi  $\mathcal{K}$  sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

Il est possible d'estimer les paramètres de la distribution d'une loi  $\mathcal{K}$  à partir d'un maximum de vraisemblance [5, 55].

### 1.3.2.7 Loi $\chi^2$

Une variable aléatoire  $X$  suit une loi du  $\chi^2$  de paramètre  $\alpha_\chi$ , notée aussi  $X \sim \chi^2(\alpha_\chi)$ , si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme :

$$f_{\chi^2(\alpha_\chi)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\alpha_\chi}{2}} \Gamma(\frac{\alpha_\chi}{2})} x^{\frac{\alpha_\chi}{2} - 1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.57)$$

Le paramètre  $\alpha_\chi$  correspond au nombre de degrés de liberté de la loi.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire d'une loi du  $\chi^2$   $X \sim \chi^2(\alpha_X)$  a pour expression :

$$F_{\chi^2}(\alpha_X)(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x \exp(-t) t^{\frac{\alpha_X}{2}-1} dt}{\Gamma(\frac{\alpha_X}{2})} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.58)$$

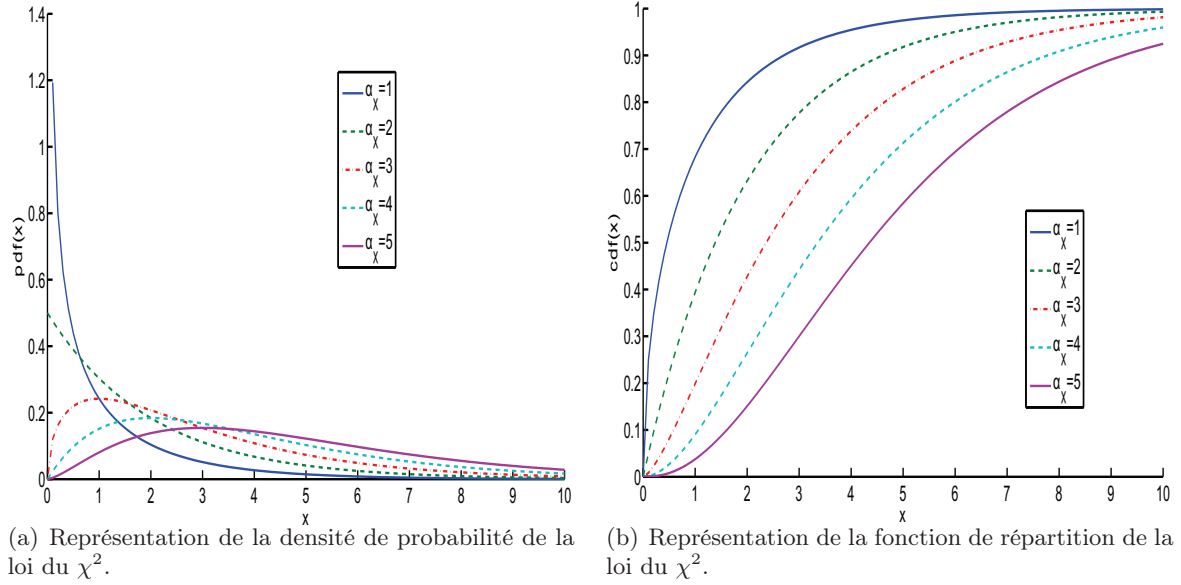


FIGURE 1.11 – Influence des paramètres de la loi du  $\chi^2$  sur les variations de la densité de probabilité et la fonction de répartition.

Dans la suite de ce manuscrit, les lois de Gauss, Weibull et  $\mathcal{K}$  sont notamment utilisées pour estimer les données issues de capteurs sonar et radar dans les chapitre 3 et 4.

### 1.3.3 Théorèmes de convergence

**Théorème 1.3.1** (Convergence en loi). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ,  $F_n$  leurs fonctions de répartitions, et  $X$  une variable aléatoire définie sur le même espace, de fonction de répartition  $F$ .

On dit que la suite  $(X_n)$  converge en loi si et seulement si en tout point  $x$  où  $F$  est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x) \quad (1.59)$$

**Théorème 1.3.2** (Théorème de la limite centrale). Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $n$  variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi d'espérance  $\delta$  et de variance  $\sigma^2$ . La quantité :

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\delta}{\sigma\sqrt{n}} \quad (1.60)$$

converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, 1)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Dans cette section, nous avons présenté diverses distributions utilisées en statistique pour caractériser des données. Cependant, ces modèles ne sont pas toujours adaptés pour représenter

ces données issues d'expériences ou de phénomènes aléatoires. Par conséquent, la partie suivante liste deux test statistiques permettant de vérifier l'adéquation entre les données théoriques et réelles : le test du  $\chi^2$  et le test de Kolmogorov-Smirnov.

## 1.4 Tests statistiques

Il est difficile d'évaluer visuellement la qualité d'un modèle obtenu à partir d'échantillons. Le problème est donc de trouver un critère permettant d'évaluer la pertinence d'un modèle. Plusieurs mesures de similarité entre distributions observées et théoriques permettent de quantifier la validité d'un modèle :

- distance du  $\chi^2$  [172].
- distance de Kolmogorov-Smirnov [145].
- la divergence de Kullback-Leibler [126].
- distance de Bhattacharya [21].

Nous nous intéressons plus particulièrement aux mesures découlant de tests statistiques de qualité d'ajustement (*goodness-of-fit* en anglais). Il existe deux grandes familles de tests statistiques : l'une appelée tests paramétriques et l'autre appelée tests non paramétriques. La différence entre ces deux familles est que le test non paramétrique se porte sur la loi elle-même et non sur les paramètres de la loi sous-jacente. L'objectif est de savoir si la loi choisie peut modéliser ou non les données. Les deux tests non paramétriques [192] permettant d'évaluer la validité d'une hypothèse sont le test du  $\chi^2$  et le test de Kolmogorov-Smirnov. Par la suite, nous détaillons ces deux tests non paramétriques. Nous supposons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur échantillon et l'hypothèse  $H_0$  :

- $H_0$  : Les échantillons  $\mathbf{x}$  suivent la loi  $\mathcal{L}$  avec  $\mathcal{D}$  paramètres à estimer.

### 1.4.1 Test du $\chi^2$

Le test du  $\chi^2$  a été initié par Karl Pearson en 1900. Avant de réaliser un test, il est nécessaire de formuler une hypothèse où les données sont issues d'une loi quelconque. Les données ont été préalablement rangées en classe. Le test du  $\chi^2$  se décompose ensuite en plusieurs étapes. On détermine le nombre de degrés de liberté à partir du nombre de classes. Ensuite, on fixe un seuil ou risque de se tromper. À partir de ces deux quantités, il faut calculer la distance critique à l'aide d'une table de  $\chi^2$ . On calcule enfin la distance entre les échantillons et la loi. Au final l'hypothèse est rejetée si la distance est supérieure à la valeur critique ; dans le cas contraire, l'hypothèse est validée.

Mathématiquement, ce test est formulé de la façon suivante. Tout d'abord, nous répartissons les  $n$  échantillons dans  $N$  classes distinctes, notées  $C_i$  avec  $i \in [1; N]$ . On détermine ensuite les effectifs théoriques des classes par  $n \times \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(C_i)$ . Pour que le test soit valable, les effectifs théoriques de chaque classe doivent vérifier  $n \times \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(C_i) > 5$ . Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de regrouper certaines classes entre elles. Une fois que cette contrainte est vérifiée, on calcule la quantité  $\chi_0^2$  :

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(N_i - n \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(C_i))^2}{n \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(C_i)} \quad (1.61)$$

Le  $\chi_0^2$  mesuré sur l'échantillon suit une loi du  $\chi^2$  avec  $N - \mathcal{D} - 1$  degrés de liberté. À seuil fixé, si  $\chi_0^2 \geq \chi^2$  l'hypothèse peut être validée.

Lors qu'on réalise un test du  $\chi^2$ , les effectifs théoriques doivent être supérieurs à 5 et donc par conséquent nous devons être attentifs au découpage entre les différentes classes.

### 1.4.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov compare la fonction de répartition des échantillons avec celle de la loi considérée.

Soient  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les fonctions de répartition empiriques d'échantillons de taille  $n$ , engendrées par une loi de fonction de répartition  $F$ . On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \max_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \right) = \alpha(c) \quad (1.62)$$

avec

$$\alpha(c) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \exp(-2i^2 c^2) \quad (1.63)$$

Lorsque nous effectuons un test de Kolmogorov-Smirnov, nous précisons la valeur critique permettant de rejeter l'hypothèse nulle (notée p-value dans le chapitre 3) ainsi que l'écart maximal entre la fonction de répartition observée et attendue (noté ksstat dans le chapitre 3).

L'avantage du test de Kolmogorov-Smirnov par rapport au test du  $\chi^2$  est de travailler directement avec la fonction de répartition, ce qui ne pose pas de problème de découpage dans la définition des classes. Par conséquent, nous préférons par la suite utiliser le test de Kolmogorov-Smirnov plutôt que le test du  $\chi^2$ .

## 1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les systèmes radar et sonar utilisés en milieu maritime. Nous avons pu voir qu'il existe une analogie entre ces deux technologies. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons à deux problèmes : la caractérisation des sédiments marins et la caractérisation du fouillis de mer.

La théorie des probabilités utilisée par la suite a été présentée afin de caractériser des phénomènes aléatoires. Le problème est qu'il existe un grand nombre de lois de probabilité et qu'il est parfois difficile de faire un choix. Pendant longtemps, les méthodes statistiques ont été fondées sur l'hypothèse que les données pouvaient être modélisées par une loi Gaussienne. En pratique, l'hypothèse Gaussienne n'est pas toujours vérifiée. Les données que nous considérons dans le cadre de ce travail ne sont pas Gaussiennes et présentent deux propriétés : une propriété d'asymétrie qui caractérise le fait que la densité de probabilité ne présente pas de symétrie par rapport à un mode et une propriété de queue lourde qui caractérise le fait que la queue de la distribution décroît plus lentement qu'une queue de loi Gaussienne. Cependant, il est possible de considérer ces propriétés à partir des distributions  $\alpha$ -stables. Par conséquent, le chapitre suivant est consacré au développement des différentes définitions des distributions  $\alpha$ -stables qui sont retenues dans le présent travail.





## Chapitre 2

# Distributions $\alpha$ -stables : définitions et estimation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>30</b>
<b>2.2</b>	<b>Distributions <math>\alpha</math>-stables unidimensionnelles</b>	<b>32</b>
2.2.1	Définitions	32
2.2.1.1	Définition de la stabilité	32
2.2.1.2	Densité de probabilité et fonction de répartition	33
2.2.1.3	Simulation d'une variable aléatoire stable	36
2.2.2	Estimation des paramètres	36
2.2.2.1	Méthodes fondées sur les quantiles	37
2.2.2.2	Méthodes fondées sur la fonction caractéristique	38
2.2.2.3	Méthode par maximum de vraisemblance	40
2.2.2.4	Méthode par moindres carrés	44
2.2.2.5	Comparaison entre les différents estimateurs	45
<b>2.3</b>	<b>Distributions <math>\alpha</math>-stables multidimensionnelles</b>	<b>50</b>
2.3.1	Définition	50
2.3.1.1	Définition de la stabilité	50
2.3.1.2	Densité de probabilité	51
2.3.1.3	Simulation de vecteurs aléatoires stables	51
2.3.2	Estimation des paramètres	51
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>

---

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les différents systèmes d'acquisition des données issues de la perception et de l'observation de l'environnement naturel, ainsi que des éléments théoriques de probabilité permettant la description statistique de l'information. Nous avons notamment fait l'inventaire des lois de probabilité les plus utilisées. Le problème avec ces lois est qu'elles n'arrivent pas toujours à représenter les phénomènes de queue lourde et d'asymétrie de la densité de probabilité considérée. Par conséquent, nous utilisons une famille de lois appelée les distributions  $\alpha$ -stables permettant de prendre en compte ces contraintes. Nous développons notamment la définition de stabilité ainsi que l'expression de sa fonction de répartition et de sa densité de probabilité. Nous exposons notamment les différentes familles d'estimateurs d'une loi  $\alpha$ -stable basées sur : les quantiles, la fonction caractéristique, le maximum de vraisemblance. Nous développons aussi l'algorithme des moindres carrés que nous avons proposé pour l'estimation des distributions  $\alpha$ -stables et comparons les performances avec les autres estimateurs. Enfin, nous étudions l'extension des définitions des lois stables à plusieurs dimensions.

## 2.1 Introduction

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les différentes notions mathématiques autour d'une variable aléatoire. Nous avons exposé plusieurs lois continues utilisées en analyse de données et en traitement du signal. L'objectif de ce chapitre est de présenter une classe particulière de lois : les distributions  $\alpha$ -stables que nous avons retenues dans le cadre de notre travail.

La loi normale ou dite de Gauss est la distribution statistique la plus connue et la plus utilisée depuis longtemps. Plusieurs ouvrages [122, 130] attribuent la découverte de la loi normale au mathématicien français Abraham de Moivre apparue dans sa seconde édition de *The doctrine of chance* [48]. Il y décrit la loi normale comme une approximation de la loi binomiale pour des tailles d'échantillons  $n$  grands. Toutefois, Stigler [207] rejette cette hypothèse puisque de Moivre n'utilisait pas la notion de densité de probabilité normale. En réalité, la paternité de la loi normale est dû aux travaux de Gauss [85] sur la minimisation de l'erreur de mesure à partir de la méthode des moindres carrés. Laplace contribua fortement aux travaux sur la loi normale notamment en explicitant le calcul de l'intégrale d'Euler (bien avant Gauss) et en démontrant le théorème de la limite centrale. Par la suite, Maxwell montra que la loi normale n'était pas juste un outil mathématique mais bien un modèle permettant de modéliser des phénomènes naturelles [148]. En réalité, la loi Gaussienne n'est qu'un cas particulier des distributions  $\alpha$ -stables. En effet, Laplace s'est intéressé à trouver l'expression analytique de la transformée de Fourier d'une densité de probabilité : il en arrive à la conclusion que la transformée de Fourier d'une Gaussienne a la même expression que la densité de probabilité Gaussienne. Par la suite, Cauchy étend les travaux de Laplace en calculant la transformée de Fourier d'une fonction de Gauss généralisée du type  $f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-ct^h) \cos(tx) dt$  avec  $h \in \mathbb{N}$ . Bien que Cauchy n'ait pas réussi à résoudre ce problème, il arriva tout de même à l'expression de la loi de Cauchy dans le cas où  $h = 1$ . Dans le cas où l'entier naturel  $h$  est remplacé par un réel  $\alpha$ , on obtient la famille des lois  $\alpha$ -stables. L'inconvénient à cette époque est que cette famille de lois n'était pas considérée comme une densité de probabilité. Les travaux de Pòlya et Bernstein ont permis d'établir que les lois stables étaient des densités de probabilité dans le cas où  $\alpha \in ]0; 2]$  [107]. Généralement, on attribue la découverte des lois stables à Lévy en 1924 dans l'article *Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles* [141]. Dans cet article, Lévy étudie le théorème de la limite centrale et note que lorsqu'on utilise la contrainte d'une variance infinie, la loi limite est une loi stable. Lévy se propose ensuite de déterminer l'expression de la transformée de Fourier de toutes les densités de probabilité  $\alpha$ -stables. La densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable est souvent caractérisée par l'appellation de loi à queue lourde (*heavy-tails* en anglais), du fait que la queue de la distribution décroît asymptotiquement plus lentement que la loi Gaussienne. Elle est aussi caractérisée par un coefficient d'asymétrie (*skewness* en anglais), qui traduit le fait que la densité de probabilité n'est pas symétrique par rapport à son mode. Elle se caractérise aussi par un phénomène de leptokurticité, c'est-à-dire que l'on observe la plupart des événements proches de la moyenne. La notion de stabilité vient du fait que toute combinaison linéaire de variables aléatoires stables donne aussi une loi stable. Cependant, le principal obstacle à l'utilisation des lois stables est le manque d'expression analytique exacte pour sa densité de probabilité.

Plusieurs domaines d'application utilisant les distributions  $\alpha$ -stables sont recensés dans la littérature. Une bibliographie très détaillée a été réalisée par Nolan [165] et Uchaikin et Zolotarev [216]. Nous rappelons un bref historique des domaines d'application des distributions  $\alpha$ -stables. La première application des lois  $\alpha$ -stables est à mettre à l'actif de l'astronome danois Holtsmark [102]. Il découvrit en 1919 que la force gravitationnelle exercée par le système stellaire sur un point de l'univers était modélisée par une distribution  $\alpha$ -stable d'exposant caractéristique  $\alpha = \frac{3}{2}$ . Par la suite en 1924, Lévy décrit mathématiquement la définition des lois stables comme une extension des lois Gaussiennes utilisées dans la théorie des erreurs. Le problème avec la

définition des lois  $\alpha$ -stables est qu'elles n'ont pas d'expression analytique, sauf pour des cas particuliers comme la loi de Gauss, la loi de Cauchy ou la loi de Lévy. Par conséquent, les lois  $\alpha$ -stables sont restées dans l'anonymat jusqu'aux travaux réalisés en finance par Mandelbrot dans les années 60 [142] (voir figure 2.1). À cette époque, les marchés financiers étaient exclusivement

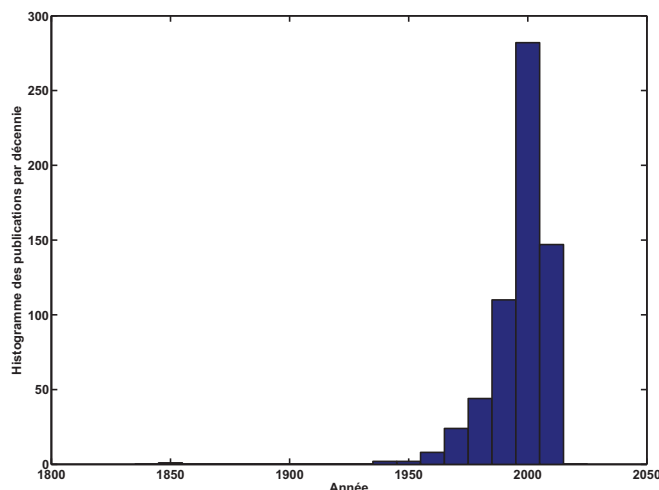


FIGURE 2.1 – Représentation du nombre de publications par décennie.

fondés sur les travaux de Bachelier [12] respectant trois principes :

- la loi des grands nombres selon laquelle les fluctuations aléatoires se neutralisent et deviennent insignifiantes lorsque le nombre d'observations a suffisamment augmenté.
- le théorème de la limite centrale selon lequel une variable aléatoire peut être modélisée par une Gaussienne.
- toute action du présent est indépendante de son passé.

Cependant, ces modèles mathématiques ne sont plus valides lorsque les marchés sont confrontés à une crise. Mandelbrot suggère alors de modéliser les variations du prix du coton à partir d'une distribution  $\alpha$ -stable. Les lois stables sont utilisées pour représenter les fluctuations de la spéculation boursière, les taux d'intérêt [72, 180]. L'une des principales qualités des distributions stables est de pouvoir modéliser des bruits impulsifs. En effet, le bruit impulsif apparaît dans de nombreux domaines : en radar [3, 13], en traitement de l'image [128], en télécommunications pour les lignes terrestres [211] et les téléphones portables [86, 88], en acoustique [2, 37]. L'ouvrage de Nikias et Shao [160] décrivent les techniques utilisées en traitement du signal à partir de distributions  $\alpha$ -stables symétriques. Plusieurs thèses en traitement du signal font référence aux distributions  $\alpha$ -stables. Par exemple, nous pouvons citer la thèse de Kidmose [116] qui traite de la séparation aveugle de sources dans le cas où les observations sont des mélanges linéaires de sources modélisées par des distributions  $\alpha$ -stables. Sahmoudi [191] présente dans son mémoire de thèse des techniques d'estimation et de séparation dans des milieux présentant des phénomènes impulsifs se caractérisant par des processus admettant des distributions à queue lourde ; Boubchir [25] propose dans sa thèse une méthode de débruitage où les coefficients en ondelettes sont déterminés par un *a priori*  $\alpha$ -stable.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons les différentes propriétés et définitions des distributions  $\alpha$ -stables.

## 2.2 Distributions $\alpha$ -stables unidimensionnelles

Dans cette partie, nous allons présenter les différentes définitions, propriétés et méthodes d'estimation des distributions  $\alpha$ -stables.

### 2.2.1 Définitions

#### 2.2.1.1 Définition de la stabilité

Il existe plusieurs définitions équivalentes des lois stables ainsi que plusieurs paramétrisations. Dans la suite, nous présentons trois définitions équivalentes des lois stables.

**Définition 2.2.1** (Stabilité). Une variable aléatoire  $X$  est stable si  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$ , il existe  $c \in \mathbb{R}^+$  et  $d \in \mathbb{R}$  tels que :

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \quad (2.1)$$

avec  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que  $X$ .

L'équation (2.1) définit la notion de stabilité mais ne donne en aucun cas la façon de paramétriser les distributions  $\alpha$ -stables. Pour y parvenir, les distributions  $\alpha$ -stables sont décrites à partir de leurs fonctions caractéristiques.

Les lois stables sont couramment définies à partir de leurs fonctions caractéristiques. Il existe dans la littérature plusieurs paramétrisations des distributions  $\alpha$ -stables [213, 236]. La plus connue est celle décrite par Samorodnitsky and Taqu. Cependant, la plus utilisée semble être celle définie par Zolotarev. Samorodnitsky and Taqu proposent dans [213] de définir une variable aléatoire stable  $X$  à partir de sa fonction caractéristique. La paramétrisation de la fonction caractéristique (appelée paramétrisation ( $S$ )) vérifie :

**Définition 2.2.2** (Samorodnitsky and Taqu [213]). Une variable aléatoire  $X$  est dite stable, notée  $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ , si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme :

$$\phi_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}(t) = \begin{cases} \exp(jt\delta - |\gamma t|^\alpha [1 - j\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sgn}(t)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(jt\delta - |\gamma t| [1 + j\beta \frac{2}{\pi} \text{sgn}(t) \log |t|]) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec les contraintes pour les paramètres  $\alpha \in ]0; 2]$ ,  $\beta \in [-1; 1]$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $\text{sgn}$  la fonction signe.

On peut interpréter les 4 paramètres précédents de la manière suivante :

- $\alpha$  est appelé l'exposant caractéristique. Il permet de caractériser la queue de la distribution. Par exemple, plus  $\alpha$  est proche de 2 et plus la probabilité d'observer des valeurs de la variable aléatoire loin de la position centrale est faible et inversement.
- $\beta$  correspond au paramètre d'asymétrie (appelé *skewness*). Si  $\beta = 1$ , la distribution est dite totalement asymétrique à droite. De même, la distribution est dite totalement asymétrique à gauche si  $\beta = -1$ .
- $\gamma$  désigne le paramètre de dispersion. Il permet de mesurer la dispersion de la loi autour du paramètre  $\delta$ .
- $\delta$  est appelé le paramètre de position. Il permet de positionner la loi suivant l'axe des abscisses.

Zolotarev a proposé dans [236] une autre expression de la fonction caractéristique d'une distribution  $\alpha$ -stable (aussi appelée paramétrisation ( $Z$ )).

**Définition 2.2.3** (Zolotarev [236]). Une variable aléatoire  $X$  est dite stable, notée  $X \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$  si sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\phi_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}(t) = \begin{cases} \exp(jt\delta - |\gamma t|^\alpha [1 + j\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \operatorname{sgn}(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(jt\delta - |\gamma t| [1 + j\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \log |t|]) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Nolan [165] discute la paramétrisation à choisir. La paramétrisation proposée par Samorodnitsky et Taqqu [213] n'offre pas la continuité de la fonction caractéristique aux points où  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , alors que celle de Zolotarev est continue par rapport à tous les paramètres. Pour cette raison calculatoire, la paramétrisation de Zolotarev est utilisée couramment (c'est le cas dans la suite de ces travaux).

La propriété de stabilité des lois stables entraîne qu'elles sont les seules limites possibles à une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette remarque définit le théorème de la limite centrale généralisé. Il a été formalisé dans [28] :

**Théorème 2.2.1** (Théorème de limite centrale généralisé). Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il existe une suite  $a_n > 0$  et une suite  $b_n \in \mathbb{R}$  tels que la quantité :

$$\frac{(X_1 + \dots + X_n)}{a_n} + b_n \quad (2.4)$$

converge en loi vers une loi stable.

**Propriété 2.2.1.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes avec  $X_i \sim S_\alpha(\beta_i, \gamma_i, \delta_i)$  avec  $i = \{1, 2\}$ . On a  $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$  avec :

$$\begin{aligned} - \beta &= \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha} \\ - \gamma &= (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \\ - \delta &= \delta_1 + \delta_2 \end{aligned}$$

Toutes ces définitions ne donnent en aucun cas la manière de représenter les lois stables. Par conséquent, nous développons par la suite la façon de représenter les lois stables.

### 2.2.1.2 Densité de probabilité et fonction de répartition

La relation entre la densité de probabilité  $f_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}$  et sa fonction caractéristique  $\phi_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}$  est connue à travers la transformée de Fourier :

$$f_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)}(t) \exp(-jtx) dt \quad (2.5)$$

Cependant, la densité de probabilité d'une  $\alpha$ -stable est difficile à représenter à partir de cette définition pour deux raisons. Tout d'abord, la fonction à intégrer est complexe. Ensuite, les bornes de l'intégrale sont infinies. Nolan propose dans [162] un moyen de représenter les distributions  $\alpha$ -stables préalablement normalisées, c'est-à-dire pour  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ . Il s'appuie principalement sur des changements de variables lui permettant d'obtenir une intégrale aux bornes finies. Les détails des calculs permettant d'obtenir la densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable sont présentés en Annexe B. En s'appuyant sur les résultats obtenus dans l'Annexe B, nous représentons l'influence de chaque paramètre des distributions  $\alpha$ -stables pour plusieurs configurations en Figure 2.2.

En général, il est difficile de modéliser les différentes distributions à partir de la fonction caractéristique. Cependant, pour des valeurs de paramètres bien précises, il est possible de

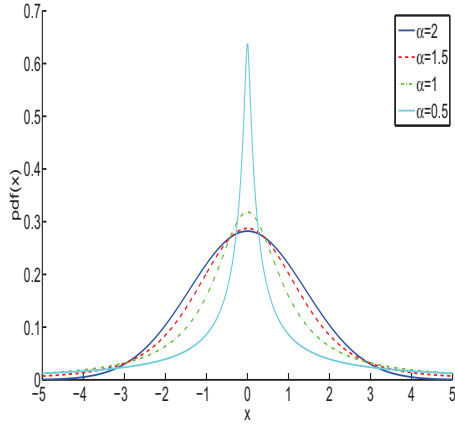
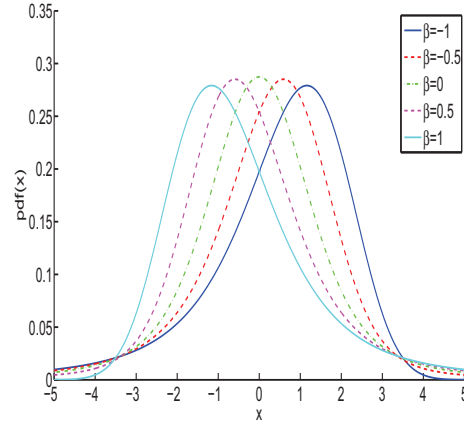
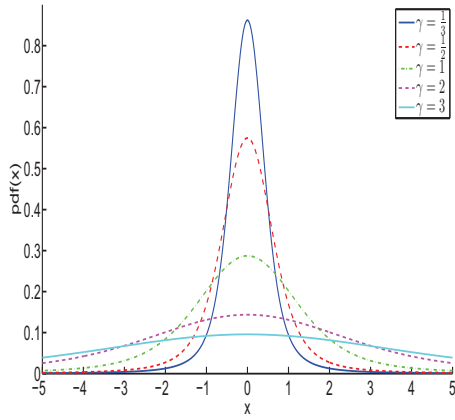
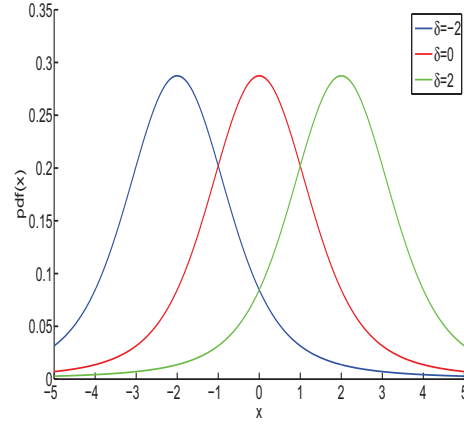

 (a) Influence du paramètre  $\alpha$  sur la densité de probabilité pour  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ .

 (b) Influence du paramètre  $\beta$  sur la densité de probabilité pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ .

 (c) Influence du paramètre  $\gamma$  sur la densité de probabilité pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$  et  $\delta = 0$ .

 (d) Influence du paramètre  $\delta$  sur la densité de probabilité pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$ .

 FIGURE 2.2 – Représentation de la densité de probabilité des distributions  $\alpha$ -stables.

modéliser des distributions connues. En effet, dans le cas où  $\alpha = 2$  et  $\beta = 0$ , on obtient une distribution Gaussienne de densité de probabilité :

$$f_{S_2(0, \sigma/\sqrt{2}, \delta)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\delta)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.6)$$

avec  $\delta$  correspondant à la moyenne et  $\sigma^2$  à la variance. Il faut noter que  $\sigma^2 = 2\gamma^2$ .

**Propriété 2.2.2** (Comportement asymptotique des queues de distribution [160]). Les lois  $\alpha$ -stables sont souvent caractérisées par un comportement de queue lourde. Si une variable aléatoire  $X$  suit une loi  $\alpha$ -stable symétrique  $S_\alpha(0, \gamma, \delta)$ , on a alors la propriété suivante :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}(X > x) &= C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \gamma^\alpha \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \mathbb{P}(X < -x) &= C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \gamma^\alpha \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$C_\alpha = \left( \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx \right)^{-1} \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Cette quantité permet de distinguer les lois stables par rapport aux lois normales. En effet, la queue de la distribution stable décroît selon une loi de puissance tandis que la queue de la distribution Gaussienne décroît selon une loi exponentielle [160]. Concrètement, la queue de la distribution stable décroît plus lentement que la queue d'une distribution Gaussienne (cf. figure 2.3).

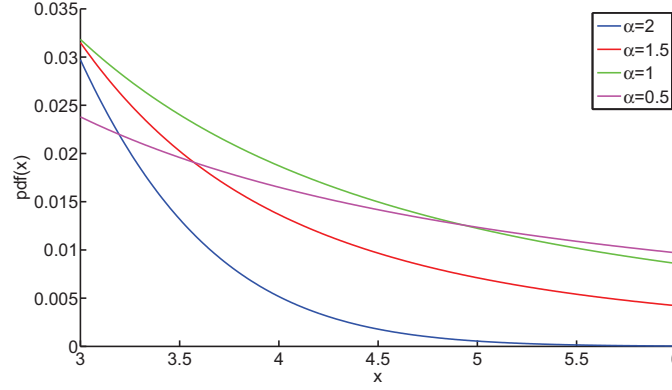


FIGURE 2.3 – Comportement asymptotique des lois stables

*Remarque 2.2.1.* Dans le cas où  $\alpha \neq 2$ , la variance est infinie. Cette propriété peut être observée en utilisant deux tests. Le premier est appelé le test de la variance infinie [90]. On considère  $n$  échantillons d'une distribution quelconque et on calcule la variance empirique :

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.9)$$

avec  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

On trace ensuite  $S_n^2$  est fonction de  $n$ . Si  $n$  augmente et la variance est finie alors le tracé doit converger.

Le deuxième est appelé le test du log de la queue [142]. Il consiste à fixer  $t$  et de calculer la quantité :

$$g(t) = \log \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{|x_i| > t} \right) \quad (2.10)$$

On trace ensuite  $g(t)$  en fonction de  $\log(t)$ . Si la pente devient finie à partir d'une valeur de  $t$ , la loi a une variance infinie.

Il est possible de décrire une distribution de Cauchy pour des valeurs de  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . La densité de probabilité s'écrit alors :

$$f_{S_1(0,\gamma,\delta)}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \delta)^2} \quad (2.11)$$

De plus, on décrit une distribution de Lévy pour des valeurs de  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 1$ . L'expression de sa densité de probabilité est la suivante :

$$f_{S_{1/2}(1,\gamma,\delta)}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{\frac{3}{2}}} \exp \left( -\frac{\gamma}{2(x - \delta)} \right) \quad (2.12)$$



avec  $x > \delta$ . Les trois lois (définies par les équations (2.6), (2.11) et (2.12)) sont les seules à avoir une expression analytique exacte de leurs densités de probabilité et appartiennent à la classe des lois  $\alpha$ -stables symétriques.

**Définition 2.2.4.** Une variable aléatoire est dite  $\alpha$ -stable symétrique si  $\beta = 0$  et  $\delta = 0$ . De même, une variable aléatoire est dite symétrique par rapport à  $\delta$  si  $\beta = 0$ .

Pour les autres cas, la densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable peut être obtenue à partir d'un développement en série entière [20, 76] :

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \Gamma(\alpha i + 1) \left(\frac{x}{r}\right)^{-\alpha i} \sin\left(\frac{i\pi}{2}(\alpha + \zeta)\right) & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi x} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{x}{r}\right)^i \sin\left(\frac{i\pi}{2\alpha}(\alpha + \zeta)\right) & \text{si } 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} \quad (2.13)$$

avec  $\zeta = -\frac{2}{\pi} \arctan(\eta)$ ,  $r = (1 + \eta^2)^{\frac{-1}{2\alpha}}$  et  $\eta = \beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})$ .

Cependant, la nature infinie de la somme fait qu'en pratique il est difficile d'utiliser cette formulation.

### 2.2.1.3 Simulation d'une variable aléatoire stable

Kanter [109] fut le premier à engendrer des variables aléatoires stables  $S_\alpha(1, 1, 0)$  avec  $\alpha < 1$ . Par la suite, Chambers, Mallows et Stuck [36] étendent la méthode au cas général. Ils définissent  $Z$  et  $Y$  comme étant deux variables aléatoires indépendantes, telles que  $Z$  soit uniformément distribuée sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $Y$  soit distribuée exponentiellement de paramètre 1. On peut définir une variable aléatoire stable normalisée, noté  $X \sim S_\alpha(\beta, 1, 0)$  par :

$$X = \begin{cases} \zeta + \frac{\sin(\alpha z) - \zeta \cos(\alpha z)}{(\cos(z))^{\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{\cos((1-\alpha)z) - \zeta \sin((1-\alpha)z)}{y} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left( \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \tan(z) - \beta \ln \left( \frac{\frac{\pi}{2} y \cos(z)}{\frac{\pi}{2} + \beta z} \right) \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

avec  $\zeta = -\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})$ . Pour obtenir une variable aléatoire  $S_\alpha(\beta, \gamma, \delta)$ , on a :

$$\begin{aligned} \gamma X + \delta &\sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma X + \frac{2}{\pi} \beta \gamma \log(\gamma) + \delta &\sim S_\alpha(\beta, \gamma, \delta) & \text{si } \alpha = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous avons développé les définitions des distributions  $\alpha$ -stables de deux manières équivalentes : la définition de la stabilité et la fonction caractéristique. Nous avons aussi montré comment obtenir une variable aléatoire  $\alpha$ -stable. L'objectif de la partie suivante est d'exposer les différentes méthodes d'estimation des paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable.

### 2.2.2 Estimation des paramètres

Il existe quatre grandes familles d'estimateurs dont découlent plusieurs méthodes fondées sur :

- les quantiles [73, 149].
- la fonction caractéristique [123, 124, 181, 182].
- le maximum de vraisemblance [31, 65, 147, 162].
- les moindres carrés.

Dans cette section, nous allons présenter une liste non-exhaustive de méthodes permettant d'estimer les paramètres des distributions  $\alpha$ -stables.

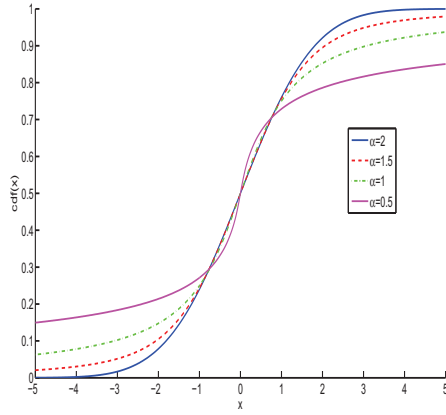
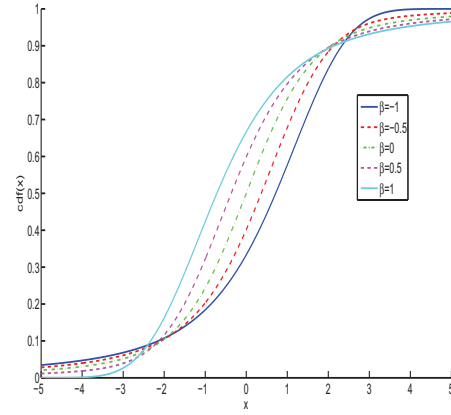
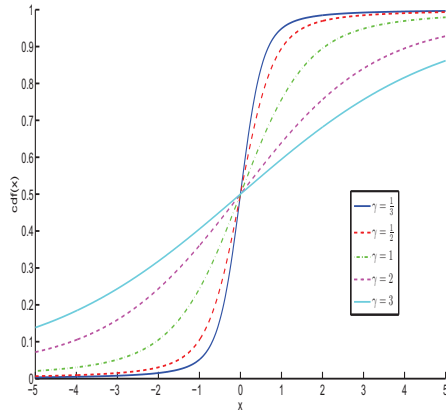
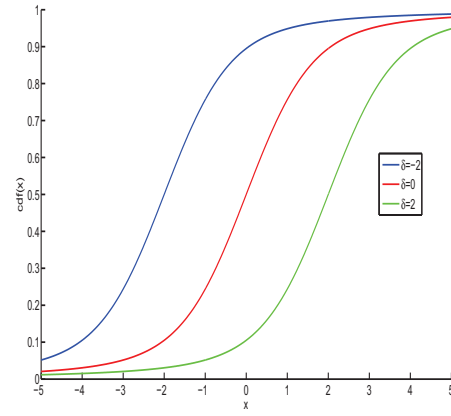

 (a) Influence du paramètre  $\alpha$  sur la fonction de répartition pour  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ .

 (b) Influence du paramètre  $\beta$  sur la fonction de répartition pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ .

 (c) Influence du paramètre  $\gamma$  sur la fonction de répartition pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$  et  $\delta = 0$ .

 (d) Influence du paramètre  $\delta$  sur la fonction de répartition pour  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$ .

 FIGURE 2.4 – Représentation de la fonction de répartition des distributions  $\alpha$ -stables.

### 2.2.2.1 Méthodes fondées sur les quantiles

Les méthodes présentées dans cette section utilisent les quantiles afin d'estimer les paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable.

#### 2.2.2.1.a Méthode de Fama-Roll

Fama et Roll [73] ont développé une méthode permettant d'estimer les paramètres des distributions  $\alpha$ -stables à partir d'échantillons. Cependant, il existe plusieurs contraintes puisque les distributions doivent être symétriques et  $\alpha \in ]1, 2]$ . La méthode développée s'appuie sur les quantiles des échantillons empiriques. Le  $f$ -quantile de la variable aléatoire  $X$  est calculé par  $\mathbb{P}(X \leq x) \geq f$ .

Dans un premier temps, on estime la quantité  $\sigma = \gamma^{\frac{1}{\alpha}}$  :

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{x}_{0,72} - \hat{x}_{0,28}}{1,654} \quad (2.16)$$

Pour des valeurs de fractiles  $f$  élevés (0,95 ; 0,96 ou 0,97), Fama et Roll proposent de calculer la quantité :

$$\hat{z}_f = \frac{\hat{x}_f - \hat{x}_{1-f}}{2\hat{\sigma}} \quad (2.17)$$

$\hat{z}_f$  correspond à un estimateur du fractile  $f$  d'une distribution  $\alpha$ -stable symétrique réduite. L'estimation de  $\alpha$  est déterminée à partir de tables fournies par Brothers *et al.* [32] et Samorodnitsky et Taqqu [213].

### 2.2.2.1.b Méthode de McCulloch

McCulloch [149] a proposé un algorithme dérivé de l'estimateur de Fama-Roll. Il a l'avantage de travailler dans le cas non-symétrique mais présente la contrainte  $\alpha \in [0.6, 2]$ . McCulloch définit :

$$\nu_\alpha = \frac{x_{0,95} - x_{0,05}}{x_{0,75} - x_{0,25}} \quad \text{et} \quad \nu_\beta = \frac{x_{0,95} + x_{0,05} - 2x_{0,5}}{x_{0,95} - x_{0,05}} \quad (2.18)$$

À partir de ces valeurs, il est possible d'estimer  $\alpha$  et  $\beta$  par :

$$\hat{\alpha} = \psi_1(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta) \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = \psi_2(\hat{\nu}_\alpha, \hat{\nu}_\beta) \quad (2.19)$$

En effet, pour chaque  $\beta$ , McCulloch a remarqué que la fonction  $\nu_\alpha$  est une fonction strictement décroissante de  $\alpha$  ; ce qui permet une estimation de  $\alpha$ . De même, pour chaque  $\alpha$ , la fonction  $\nu_\beta$  est une fonction strictement décroissante de  $\beta$  ; ce qui permet d'estimer  $\beta$ . Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont obtenues respectivement dans les tableaux C.1 et C.2 de l'Annexe C.

Ensuite, on définit la fonction  $\nu_\gamma$  par :

$$\nu_\gamma = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{\gamma} \quad (2.20)$$

Il est possible de connaître les variations de  $\nu_\gamma$  en fonction de  $\psi_3(\alpha, \beta)$  donnée dans le tableau C.3 de l'Annexe C. On obtient alors :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0,75} - \hat{x}_{0,25}}{\psi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \quad (2.21)$$

Enfin, on peut aussi définir la fonction  $\nu_\zeta$  :

$$\nu_\zeta = \frac{\zeta - x_{0,5}}{\gamma} \quad (2.22)$$

Les variations de  $\nu_\zeta$  sont connues à partir de la fonction  $\psi_5(\alpha, \beta)$  donnée dans le tableau C.4 de l'Annexe C. On obtient alors  $\hat{\zeta} = \hat{x}_{0,5} + \hat{\gamma}\psi_5(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ . Enfin, le paramètre de position est donné par :

$$\hat{\delta} = \hat{\zeta} - \hat{\beta}\hat{\gamma}\tan\left(\frac{\pi\hat{\alpha}}{2}\right) \quad (2.23)$$

### 2.2.2.2 Méthodes fondées sur la fonction caractéristique

Pour déterminer les paramètres de la loi  $\alpha$ -stable, d'autres méthodes sont fondées sur l'utilisation de la fonction caractéristique empirique :

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(jtx_i) \quad (2.24)$$

La loi des grands nombres permet de dire que la fonction caractéristique empirique  $\hat{\phi}(t)$  est un estimateur cohérent de  $\phi$ . Ces méthodes s'appuient sur des transformations de la fonction caractéristique.

### 2.2.2.2.a Méthode de Press

Press [181, 182] propose une estimation fondée sur des transformations de la fonction caractéristique. Cette méthode est simple à mettre en oeuvre. Pour tout  $\alpha$  :

$$|\phi(t)| = \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha) \quad (2.25)$$

En passant au logarithme décimal pour  $t_1 \neq t_2$  :

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log |\hat{\phi}(t_1)|}{\log |\hat{\phi}(t_2)|}}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|} \quad (2.26)$$

et pour  $\alpha \neq 1$

$$\log \hat{\sigma} = \frac{\log |t_1| \log (-\log |\hat{\phi}(t_2)|) - \log |t_2| \log (-\log |\hat{\phi}(t_1)|)}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|} \quad (2.27)$$

En définissant  $u(t) = \Im(\log \phi(t))$ , il est possible de déterminer  $\beta$  et  $\delta$  :

$$u(t) = \delta t + \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad (2.28)$$

En choisissant deux valeurs  $t_3 \neq t_4$ , on obtient 2 équations :

$$\frac{u(t_k)}{t_k} = \delta + \beta \left( \gamma^\alpha |t|^{\alpha-1} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right) \quad (2.29)$$

et

$$\tan \hat{u}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \sin(tx_i)}{\sum_{i=1}^n \cos(tx_i)} \quad (2.30)$$

À partir des équations (2.29) et (2.30), on résout un système linéaire à deux équations :

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} - \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3}}{(|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}) \hat{\sigma}^{\hat{\alpha}} \tan \frac{\hat{\alpha}\pi}{2}} \quad (2.31)$$

et

$$\hat{\delta} = \frac{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{\hat{\alpha}-1} - |t_3|^{\hat{\alpha}-1}} \quad (2.32)$$

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , on obtient :

$$\hat{\gamma} = -\frac{\log |\hat{\phi}(t_1)|}{|t_1|} \quad (2.33)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2}{\pi} \hat{\gamma} \log \left| \frac{t_4}{t_3} \right|} \quad (2.34)$$

et

$$\hat{\delta} = \frac{\log |t_4| \left| \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} \right| - \log |t_3| \left| \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4} \right|}{\log |t_4| - \log |t_3|} \quad (2.35)$$

Weron [230] soulève le problème du choix des valeurs  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_4$ . Par exemple, Koutrouvelis [123] propose de travailler avec  $t_1 = 0,2$ ,  $t_2 = 0,8$ ,  $t_3 = 0,1$  et  $t_4 = 0,4$ . Cependant, Weron remarque que la méthode de Press [181, 182] est efficace dans le cas d'une distribution  $\alpha$ -stable symétrique ( $\beta = 0$  et  $\delta = 0$ ) avec  $\gamma$  proche de 1 avec  $t_1 = 0,2$  et  $t_2 = 0,8$ .

### 2.2.2.2.b Méthode de Koutrouvelis

Koutrouvelis propose une première version de sa méthode de type régression linéaire en 1980 [123]. L'algorithme proposé est implémenté de manière itérative et se divise en deux étapes. La première étape va permettre de déterminer  $\alpha$  et  $\gamma$  à partir d'une régression linéaire de la quantité :

$$\ln(-\ln |\phi(t)|^2) = \ln(2\gamma^\alpha) + \alpha \ln |t| \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) peut se voir comme étant du type  $y_k = m + \alpha\omega_k + \epsilon_k$  avec  $m = \ln(2\gamma^\alpha)$ ,  $y_k = \ln(-\ln |\phi(t_k)|^2)$ ,  $\omega_k = \ln |t_k|$  et  $\epsilon_k$  qui correspond aux termes d'erreurs. Les termes d'erreurs sont supposés indépendants et identiquement distribués de moyenne nulle. Koutrouvelis choisit  $t_k = k \frac{\pi}{25}$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Le nombre de points optimal pour réaliser la régression linéaire dépend de l'estimation du paramètre  $\alpha$  et de la taille d'échantillons (voir Tableau C.5 de l'Annexe C).

La deuxième étape consiste à déterminer les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  à partir d'une autre régression linéaire. Tout d'abord, il est nécessaire d'introduire les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Re(\phi(t)) &= \exp(-|\gamma t|^\alpha) \cos\left(\delta t - |\gamma t|^\alpha \beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \\ \Im(\phi(t)) &= \exp(-|\gamma t|^\alpha) \sin\left(\delta t - |\gamma t|^\alpha \beta \operatorname{sgn}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

En combinant ces 2 équations, on obtient une relation de type régression permettant de calculer  $\beta$  et  $\delta$  :

$$\arctan\left(\frac{\Im(\phi(t_l))}{\Re(\phi(t_l))}\right) = \delta t_l - \beta \gamma^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}(t_l) |t_l|^\alpha \quad (2.38)$$

avec  $t_l = \pi \frac{l}{50}$ ,  $l = 1, \dots, L$ . De même, le nombre de points optimal dépend aussi de l'estimation du paramètre  $\alpha$  et du nombre d'échantillons (voir Tableau C.6 de l'Annexe C). Nous donnons un pseudo-code pour cette algorithme (voir algorithme 1). Weron [230] simplifie le choix de  $K$  et  $L$  sans perte de performance.

Koutrouvelis propose une seconde version de son algorithme [124]. Les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont solutions d'un système au sens des moindres carrés. Cet estimateur est consistant et asymptotiquement non-biaisé. Il existe d'autres méthodes d'estimation s'appuyant sur la fonction caractéristique telles que la méthode des moments de Press [182] et la méthode de Paulson, Holcomb et Leitch [171]. Cependant, il a été prouvé dans [4] que la méthode de Koutrouvelis est bien meilleure au niveau de la consistance, du biais et de l'efficacité. L'algorithme de Koutrouvelis est notamment utilisé dans le chapitre 3 pour estimer les données issues d'un sondeur monofaisceau.

### 2.2.2.3 Méthode par maximum de vraisemblance

Le maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood Estimation* en anglais noté aussi MLE), introduit par Fisher, est une méthode d'optimisation permettant d'estimer les paramètres d'une distribution. On recherche à maximiser la quantité :

$$L(\mathbf{x}; \Xi) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Xi) \quad (2.39)$$

avec  $f$  la densité de probabilité,  $\Xi$  les paramètres à estimer et  $\mathbf{x}$  des échantillons indépendants et identiquement distribués. En général, on préfère travailler avec le log-vraisemblance.

On distingue deux grandes familles utilisant le maximum de vraisemblance : les méthodes quasi-newtoniennes et l'algorithme Espérance-Maximisation [51] (*Expectation-Maximization algorithm* en anglais noté aussi EM). Les méthodes quasi-newtoniennes estiment les paramètres

**Algorithme 1** Algorithme de Koutrouvelis**ENTRÉES:**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  échantillons**SORTIES:**  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$ Initialisation par la méthode de McCulloch ou Press :  $\alpha \leftarrow \alpha_0, \beta \leftarrow \beta_0, \gamma \leftarrow \gamma_0$ , et  $\delta \leftarrow \delta_0$ .

$$x_i \leftarrow \frac{x_i - \delta}{\gamma}$$

**tantque**  $i < MaxIter$  **faire**Fixer  $K$  à partir de  $\alpha$  et  $n$  (tables) tel que  $t_k = \frac{k\pi}{25}$  avec  $k = 1, \dots, K$ 

$$\alpha_{est} \text{ et } \gamma_{est} \text{ solution de } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(jt_k x_i) = \ln(2\gamma^\alpha) + \alpha \ln |t_k|$$

$$\alpha \leftarrow \alpha_{est} \text{ et } \gamma \leftarrow \gamma * \gamma_{est}$$

$$x_i \leftarrow \frac{x_i}{\gamma_{est}}$$

Fixer  $L$  à partir de  $\alpha$  et  $n$  (tables) tel que  $t_l = \frac{k\pi}{50}$  avec  $l = 1, \dots, L$ 

$$\beta_{est} \text{ et } \delta_{est} \text{ solution de } \arctan\left(\frac{\Im(\phi(t_l))}{\Re(\phi(t_l))}\right) = \delta t_l - \beta \gamma^\alpha \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sgn}(t_l) |t_l|^\alpha$$

$$\beta \leftarrow \beta_{est} \text{ et } \delta \leftarrow \delta + \gamma * \delta_{est}$$

$$x_i \leftarrow x_i - \delta_{est}$$

**fin tantque**

itérativement en corrigeant la valeur du paramètre à l'itération précédente avec une approximation de la matrice Hessienne inverse et du gradient de la fonction à estimer. L'algorithme EM se décompose en deux étapes : la première consiste à calculer l'espérance du log-vraisemblance et la seconde consiste à maximiser le log-vraisemblance par rapport aux paramètres à estimer.

Dans le cas des distributions  $\alpha$ -stables, l'estimation à partir du maximum de vraisemblance a principalement été étudiée dans le cas symétrique. Dumouchel [65] se place dans le cas où  $\beta = 0$  et  $\delta = 0$ . Dumouchel [66] a montré que les estimateurs obtenus sont consistants et asymptotiquement normaux moyennant différentes hypothèses sur  $\alpha$  et le maximum de vraisemblance. Le problème avec la méthode du maximum de vraisemblance est le calcul de la densité de probabilité puisqu'il n'existe pas de formule analytique pour la calculer. Des tables de valeurs de la densité de probabilité des lois  $\alpha$ -stables pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  ont été fournies par Holt et Crow [101]. De même, des tables des fonctions de répartition des lois  $\alpha$ -stable symétriques ont été proposées par Wordsale [232] et Panton [169]. Des tables sur les quantiles ont été fournies par Brothers *et al.* [32] et Paulson et Delahanttry [170]. McCulloch a développé des algorithmes permettant d'approcher la densité de probabilité et la fonction de répartition symétrique avec  $\alpha > 0,85$ . Zolotarev [236] propose de représenter la densité de probabilité et la fonction de répartition symétrique à partir d'un calcul d'intégrale. Brorsen et Yang [31] s'appuient sur cette définition pour maximiser le logarithme de la vraisemblance. Nolan [162] généralise le calcul de Zolotarev [236] aux densités de probabilité non symétriques. Il est possible d'estimer une densité de probabilité d'une  $\alpha$ -stable à partir des résultats présentés dans [147]. Chaque dérivée d'une densité de probabilité  $\alpha$ -stable par rapport à chaque paramètre  $y$  est étudiée. Les différentes représentations des dérivées sont observables en figure D.3, figure D.2 et figure D.1 de l'Annexe D. L'inconvénient de cette approche est qu'il est nécessaire d'effectuer une initialisation des différents paramètres. Nous utilisons un algorithme génétique [87] pour réaliser cette étape. Il est possible d'aborder le cas non symétrique en procédant de manière analytique puisque la densité de probabilité s'exprime à partir d'un calcul d'intégrale aux bornes infinies. L'estimation des paramètres se fait à partir de méthodes numériques quasi-newtoniennes<sup>1</sup>. L'avantage avec le

---

1. En Matlab, on utilise la fonction *mle*

maximum de vraisemblance par rapport aux autres méthodes d'estimation est qu'il est possible d'étendre assez simplement l'estimation à partir d'un modèle de mélanges.

L'algorithme Espérance-Maximisation (EM) proposé par Dempster *et al.* [51] est un algorithme récursif permettant de calculer le maximum de vraisemblance des paramètres d'une loi probabiliste. Cet algorithme est notamment utilisé pour estimer une densité de probabilité multimodale à partir d'un mélange de Gaussiennes. Considérons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  un vecteur contenant  $n$  observations. On cherche à déterminer la fonction  $g$  qui permet d'approcher ces observations. On suppose qu'il faut  $K$  Gaussiennes pour le mélange. Il faut donc estimer le vecteur poids  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ , le vecteur moyenne  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_K)$  et le vecteur variance  $\boldsymbol{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2)$ . L'ensemble de ces paramètres à estimer est représenté par  $\boldsymbol{\Xi}$ . L'expression de la densité de probabilité du mélange de Gaussiennes  $g$  au point  $x$  est la suivante :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K \pi_i f(\mathbf{x}, \delta_i, \sigma_i) \quad (2.40)$$

Ensuite, il faut introduire la notion de log-vraisemblance des données complétées par :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^K z_{mi} \log(\pi_i f(x_m, \delta_i, \sigma_i)) \quad (2.41)$$

avec  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  un vecteur inconnu.

Comme son nom l'indique, l'algorithme EM se décompose en deux étapes. La première consiste à calculer l'espérance du log-vraisemblance des données complétées. On obtient à l'étape  $l$  :

$$Q(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Xi}^l) = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^K E[z_{mi}/\mathbf{x}, \boldsymbol{\Xi}^l] \log(\pi_i f(x_m, \delta_i, \sigma_i)) \quad (2.42)$$

Cette étape revient donc à calculer la quantité  $h_{mi} = E[z_{mi}/\mathbf{x}, \boldsymbol{\Xi}^l]$ , avec :

$$h_{mi} = \frac{\pi_i^l f(x_m, \delta_i^l, \sigma_i^l)}{\sum_{u=1}^K \pi_u^l f(x_m, \delta_u^l, \sigma_u^l)} \quad (2.43)$$

Une fois cette étape terminée, il faut maintenant maximiser la quantité log-vraisemblance des données complétées par rapport aux poids, moyennes et variances. Les différents poids de chaque Gaussienne sont donnés par :

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n h_{mi} \quad (2.44)$$

L'expression de la moyenne estimée est :

$$\mu_i = \frac{\sum_{m=1}^n h_{mi} x_m}{\sum_{m=1}^n h_{mi}} \quad (2.45)$$

Finalement, la variance estimée a pour expression :

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{m=1}^n h_{mi} (x_m - \delta_i)(x_m - \mu_i)'}{\sum_{m=1}^n h_{mi}} \quad (2.46)$$

---

**Algorithme 2** Algorithme EM avec mélange de Gaussiennes
 

---

**ENTRÉES:**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  échantillons,  $K$  Gaussiennes

**SORTIES:**  $[\pi_i, \delta_i, \sigma_i]$  avec  $j \in [1, K]$ 

Initialisation

 $l \leftarrow 1$ 
 $L_l \leftarrow \text{Log-vraisemblance}$ 
 $L_0 \leftarrow 2L_l$ 
**tantque**  $|\frac{100(L^l - L_0)}{2L_l}|$  et  $l < \text{MaxIter}$  **faire**

Étape E :

**pour**  $i = 1 : N$  **faire**

$$h_{mi} \leftarrow \frac{\pi_i^l f(x_m, \delta_i^l, \sigma_i^l)}{\sum_{u=1}^K \pi_u^l f(x_m, \delta_u^l, \sigma_u^l)}$$

**fin pour**

Maximisation

**pour**  $i = 1 : K$  **faire**

$$\pi_i \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n h_{mi}$$

$$\delta_i \leftarrow \frac{\sum_{m=1}^n h_{mi} x_m}{\sum_{m=1}^n h_{mi}}$$

$$\sigma_i^2 \leftarrow \frac{\sum_{m=1}^n h_{mi} (x_m - \delta_i)(x_m - \delta_i)'}{\sum_{m=1}^n h_{mi}}$$

**fin pour**
 $L^l \leftarrow L^{l+1}$ 
 $L^{l+1} \leftarrow \text{Log-vraisemblance}$ 
 $l \leftarrow l + 1$ 
**fin tantque**


---

À l'étape  $l + 1$ , si la condition  $|L(\Xi^{l+1}) - L(\Xi^l)| < \text{seuil}$  est vérifiée, l'algorithme s'arrête. Le pseudo-code est donné par l'algorithme 2.

Il est possible d'étendre l'estimation d'une densité de probabilité multimodale en utilisant un mélange de distributions  $\alpha$ -stables. Comme dans le cas Gaussien, on considère que le mélange à estimer est constitué de  $N$  distributions  $\alpha$ -stables symétriques (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ). On estime le vecteur poids  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_K)$ , le vecteur paramètre caractéristique  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ , le vecteur paramètre échelle  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_K)$  et le vecteur paramètre de localisation  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_K)$ . L'ensemble de ces paramètres à estimer est représenté par  $\Xi$ . La fonction  $g$  correspond à la densité de probabilité du mélange de distributions  $\alpha$ -stables et a pour expression :

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K \pi_i f(\mathbf{x}, \alpha_i, \gamma_i, \delta_i) \quad (2.47)$$



On définit la log-vraisemblance des données complétées pour un mélange par :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^K z_{mi} \log(\pi_i f(x_m, \alpha_i, \gamma_i, \delta_i)) \quad (2.48)$$

On calcule alors l'espérance de l'équation (2.48) :

$$Q(\Xi, \Xi^l) = \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^K E[z_{mi}/\mathbf{x}, \Xi^l] \log(\pi_i f(x_m, \alpha_i, \gamma_i, \delta_i)) \quad (2.49)$$

Comme dans le cas Gaussien, il faut calculer  $h_{mi} = E[z_{mi}/\mathbf{x}, \Xi^l]$ , avec :

$$h_{mi} = \frac{\pi_i^l f(x_m, \alpha_i^l, \gamma_i^l, \delta_i^l)}{\sum_{u=1}^K \pi_u^l f(x_m, \alpha_u^l, \gamma_u^l, \delta_u^l)} \quad (2.50)$$

On maximise la quantité  $Q(\Xi, \Xi^l)$  par rapport à chaque paramètre. Les différents poids de chaque  $\alpha$ -stable sont donnés par :

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n h_{mi} \quad (2.51)$$

Pour les autres paramètres, il est nécessaire de procéder de manière numérique. En effet, la densité de probabilité d'une  $\alpha$ -stable symétrique est complexe à cause de l'intégrale. Par conséquent, pour maximiser  $Q(\Xi, \Xi^l)$ , il suffit de calculer la dérivée de  $Q(\Xi, \Xi^l)$  par rapport à chaque paramètre et de regarder lorsqu'elle s'annule. Des travaux ont été réalisés pour calculer numériquement ces différentes dérivées [147]. Ces calculs sont détaillés en Annexe D. L'algorithme EM pour l'estimation d'un mélange de distributions  $\alpha$ -stables a fait l'objet d'une publication [82]. L'inconvénient de cette méthode est qu'il est nécessaire d'avoir une initialisation correcte. Dans le cadre de cette thèse, l'initialisation se fait à partir d'un algorithme *k-means* de partitionnement de données.

Nous avons aussi traité le cas d'un mélange de densités de probabilité  $\alpha$ -stables non symétriques. Il n'est pas possible de traiter analytiquement la densité de probabilité. La maximisation du log-vraisemblance revient à minimiser la log-vraisemblance négative <sup>2</sup> .

#### 2.2.2.4 Méthode par moindres carrés

L'estimation à partir de la méthode des moindres carrés (*Least Squares Estimation* en anglais noté LSE) est un algorithme d'optimisation permettant d'approcher des données expérimentales, déterminées par les points  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  à partir d'un modèle donné  $f$ . Cette méthode a été élaborée indépendamment par Gauss et Legendre. Le but est de minimiser la fonction de coût <sup>2</sup> :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2^2 \quad (2.52)$$

avec  $F(x) = \begin{bmatrix} f(x, x_1) - y_1 \\ \vdots \\ f(x, x_n) - y_n \end{bmatrix}$ .

On parle de régression linéaire lorsque la fonction utilisée est affine. Dans le cas de modèles non-linéaires, les algorithmes tels que la méthode à région de confiance [41] ou la méthode de

---

2. En Matlab, nous avons utilisé la fonction de minimisation avec contraintes *fmincon*.

Levenberg-Marquardt [135,143] permettent d'estimer les valeurs des paramètres. Il est également possible d'étendre l'estimation à partir des moindres carrés aux mélanges de distributions  $\alpha$ -stables dont le pseudo-code est donné par l'algorithme 3. La méthode des moindres carrés est

---

**Algorithme 3** LSE pour un mélange de distributions  $\alpha$ -stable

---

**ENTRÉES:**  $X, (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  et  $N$  composantes

**SORTIES:**  $w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  et  $\delta_i$

Initialisation :

$X_i \leftarrow \text{kmeans}(X, N)$

**pour**  $i = 1 \rightarrow N$  **faire**

$(w_i^0; \alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0, \delta_i^0) \leftarrow \text{Koutrouvelis}(X_i)$

**fin pour**

Minimisation :

$(w_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \leftarrow \min ||F(w; \alpha; \beta; \gamma; \delta)||_2^2$

---

utilisée dans le chapitre 4 pour estimer la densité de probabilité du champ électromagnétique diffusé par une surface maritime.

### 2.2.2.5 Comparaison entre les différents estimateurs

Dans cette partie, nous proposons de comparer les différents estimateurs au travers de 2 cas :

- une densité de probabilité unimodale.
- une densité de probabilité multimodale.

Pour le cas unimodal, nous comparons les performances des estimateurs suivants :

- la méthode des quantiles de McCulloch [149] (Quantile).
- la méthode de la fonction caractéristique de Koutrouvelis [124] (Moment).
- la méthode par maximum de vraisemblance (MLE).
- la méthode des moindres carrés (LSE).

En effet, les autres méthodes sont soit très coûteuses en temps de calcul, ou ont des contraintes de calculs trop fortes (par exemple la méthode de Fama et Roll ne doit pas être utilisée pour  $\alpha \leq 1$ , la méthode de Press donne un écart-type élevé pour des valeurs de  $\gamma$  n'étant pas égal à 1). Les performances des estimateurs sont évaluées en comparant les temps de calcul moyens ainsi que la somme des résidus moyens. Nous donnons notamment un intervalle de confiance où la borne inférieure correspond au premier quartile et la borne supérieure au troisième quartile. Les temps de calcul des algorithmes proprement dits ont été déterminés sous Matlab, avec un processeur Intel Xeon à 3,47 GHz, sans optimisation particulière. Les temps de calcul sont donnés en unité CPU.

Dans un premier temps, nous faisons varier l'exposant caractéristique  $\alpha = [0, 8 \quad 1, 2 \quad 1, 4 \quad 1, 6 \quad 1, 8 \quad 2]$  et en fixant le paramètre d'asymétrie  $\beta = 1$ , le paramètre de dispersion  $\gamma = 1$  et le paramètre de position  $\delta = 0$ . À paramètre fixé, nous générons une distribution  $\alpha$ -stable composée de  $n = 1000$  échantillons en estimant chaque paramètre. La procédure d'estimation est répétée 15 fois sur des échantillons indépendants et de même loi. Nous observons sur la Figure 2.5 que le maximum de vraisemblance a le temps de calcul moyen le plus élevé avec une grande dispersion. La méthode de Koutrouvelis et des quantiles ont sensiblement le même temps de calcul qui est de l'ordre de la milliseconde avec une faible dispersion, tandis que la méthode des moindres carrés donne un temps de calcul de l'ordre de la seconde avec une faible dispersion. En termes de minimisation de la somme des résidus, on remarque que les estimateurs ont le même comportement. On note aussi que la somme des résidus augmente lorsque  $\alpha > 1,6$ . En termes d'estimation des paramètres, on remarque que les quatre méthodes donnent des résultats satisfaisants pour le paramètre  $\alpha$ . Pour les autres paramètres, les valeurs

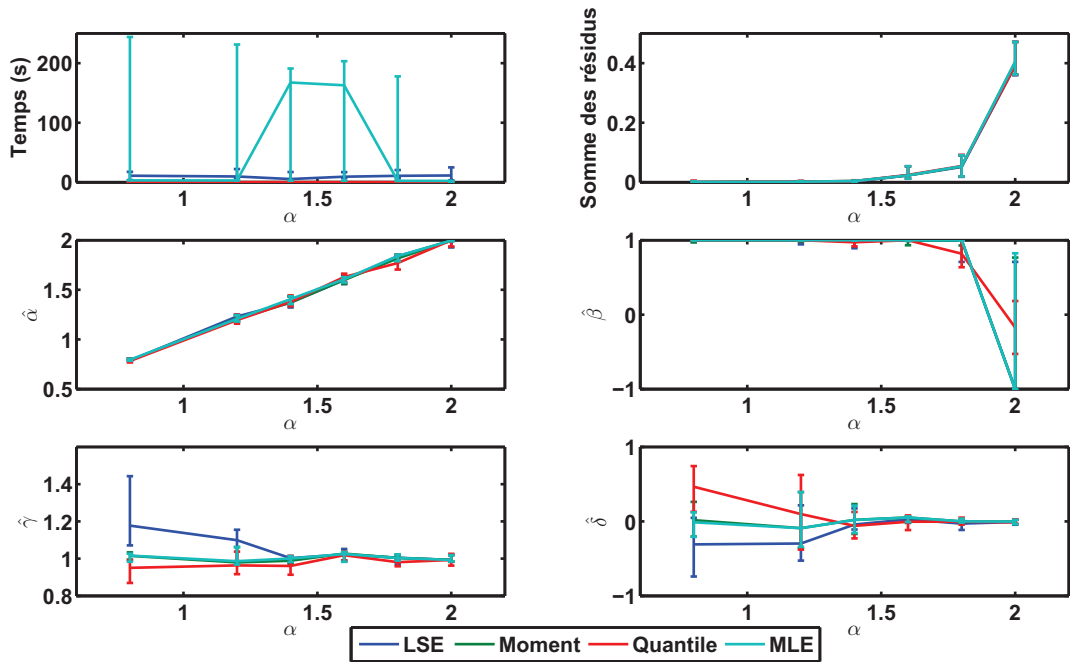


FIGURE 2.5 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre  $\alpha$  dans le cas d’une densité de probabilité unimodale  $S_\alpha(1, 1, 0)$ .

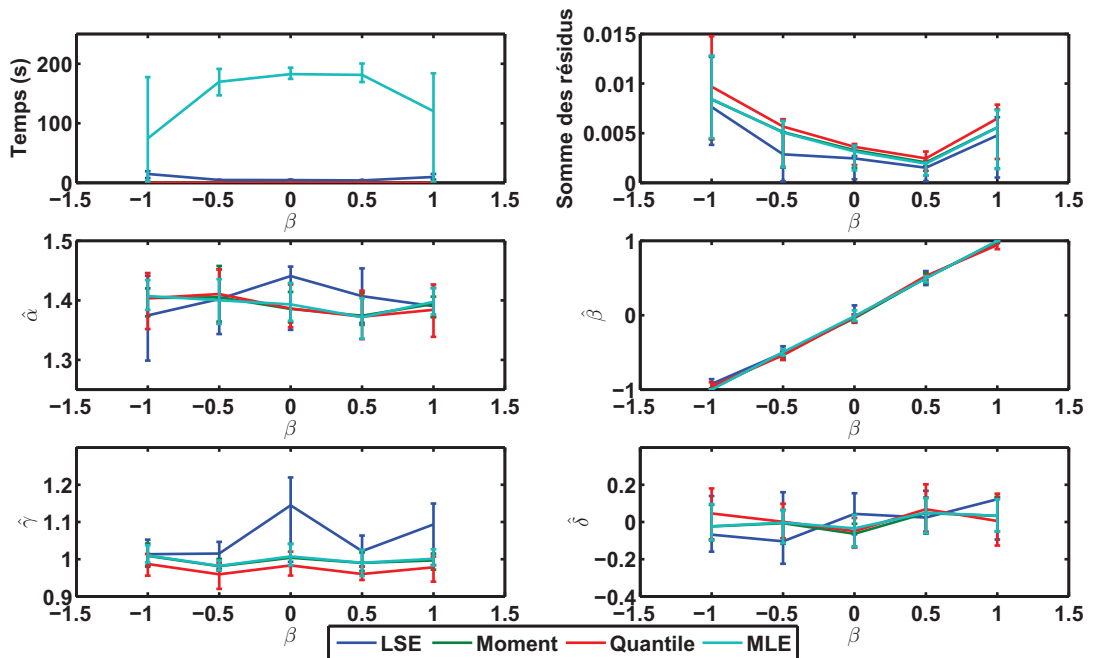


FIGURE 2.6 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre  $\beta$  dans le cas d’une densité de probabilité unimodale  $S_{1,4}(\beta, 1, 0)$ .

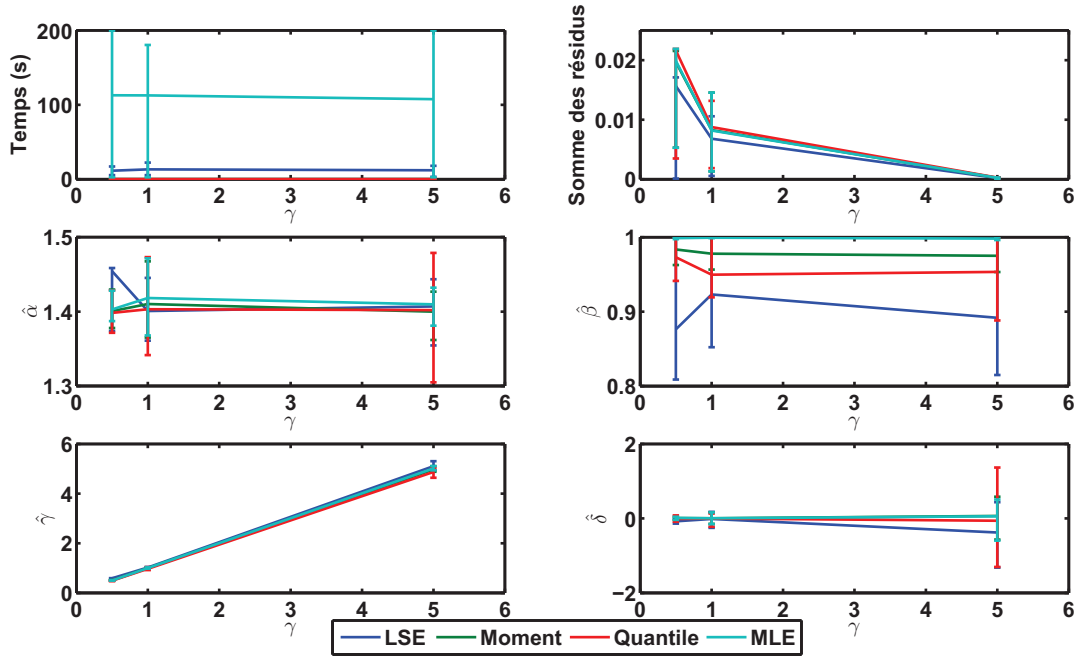


FIGURE 2.7 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre  $\gamma$  dans le cas d’une densité de probabilité unimodale  $S_{1,4}(1, \gamma, 0)$ .

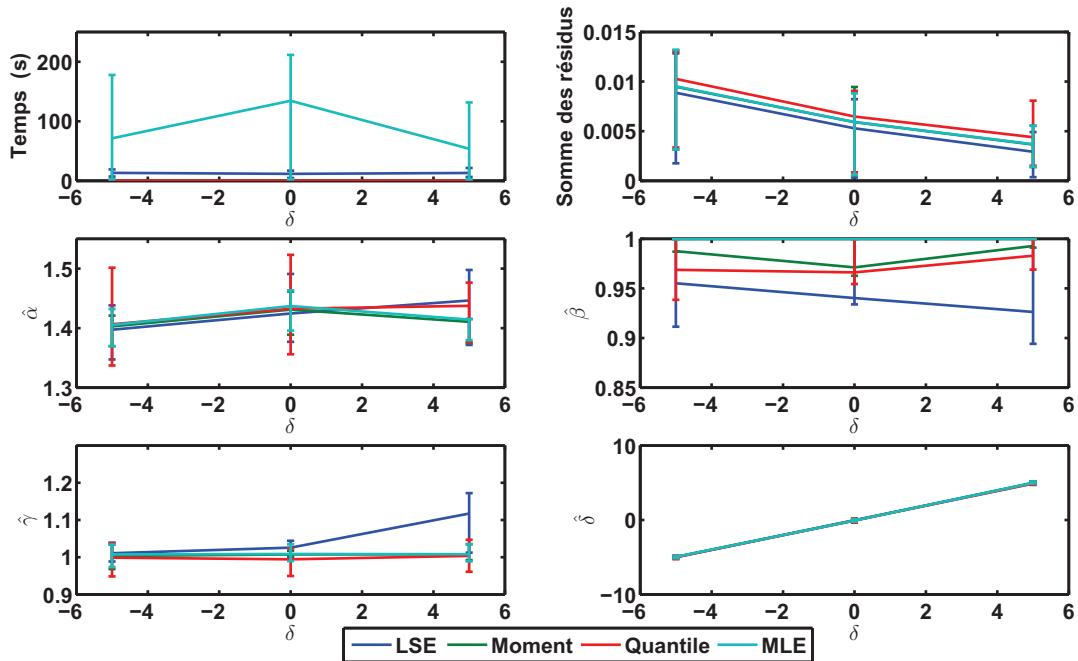


FIGURE 2.8 – Performances des estimateurs (temps de calcul, somme des résidus, paramètres de la loi stable) en fonction du paramètre  $\delta$  dans le cas d’une densité de probabilité unimodale  $S_{1,4}(1, 1, \delta)$ .

exactes ne sont pas forcément vérifiées mais les ordres de grandeurs sont respectés. En réalité, une distribution  $\alpha$ -stable est caractérisée par quatre paramètres lui permettant d'avoir plus de souplesse en termes d'estimation, en ce sens qu'il y a plus de degrés de liberté pour l'estimation des paramètres.

Dans un second temps, nous varions le paramètre d'asymétrie  $\beta = [-1 \ -0,5 \ 0 \ 0,5 \ 1]$  et nous fixons l'exposant caractéristique  $\alpha = 1,4$ , le paramètre de dispersion  $\gamma = 1$  et le paramètre de position  $\delta = 0$ . La Figure 2.6 permet d'observer les performances des différents estimateurs en faisant varier le paramètre  $\beta$ . Nous remarquons que le maximum de vraisemblance est plus coûteux en temps de calcul mais reste raisonnable (environ 3 minutes). En terme de minimisation de la somme des résidus, la méthode des moindres carrés est la plus performante. Les estimateurs permettent d'offrir une estimation exacte du paramètre d'asymétrie  $\beta$ . Cependant, les autres paramètres sont plus ou moins bien estimés.

Ensuite, le paramètre de dispersion est étudié en le faisant varier pour des valeurs  $\gamma = [0,5 \ 1 \ 5]$  et en fixant l'exposant caractéristique  $\alpha = 1,4$ , le paramètre d'asymétrie  $\beta = 1$  et le paramètre de position  $\delta = 0$ . Comme dans les cas précédents, le maximum de vraisemblance est le moins performant en terme de temps de calcul tandis que la méthode des moindres carrés est la plus performante en terme de minimisation de la somme des résidus (Figure 2.7). Pour les quatre méthodes, le paramètre de location  $\gamma$  semble être bien estimé tandis que les ordres de grandeur des autres paramètres sont respectés.

Enfin, le paramètre de position est modifié sur une plage de valeurs  $\delta = [-5 \ 0 \ 5]$  tandis que nous fixons l'exposant caractéristique  $\alpha = 1.4$ , le paramètre d'asymétrie  $\beta = 1$  et le paramètre de dispersion  $\gamma = 1$ . La performance du maximum de vraisemblance est faible en terme de temps de calcul tandis que la méthode des moindres carrés offre la meilleure performance pour la minimisation de la somme des résidus (Figure 2.8).

	Exemple 1	Exemple 2
<b>w</b>	[0,6 0,4]	[0,5 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ ]
<b><math>\alpha</math></b>	[1,4 1,6]	[1,9 1,4 1,2]
<b><math>\beta</math></b>	[0,5 -0,5]	[0,3 0,2 -1]
<b><math>\gamma</math></b>	[2 0,5]	[1,26 1,5 3]
<b><math>\delta</math></b>	[-6 0]	[-8,5 0 5]

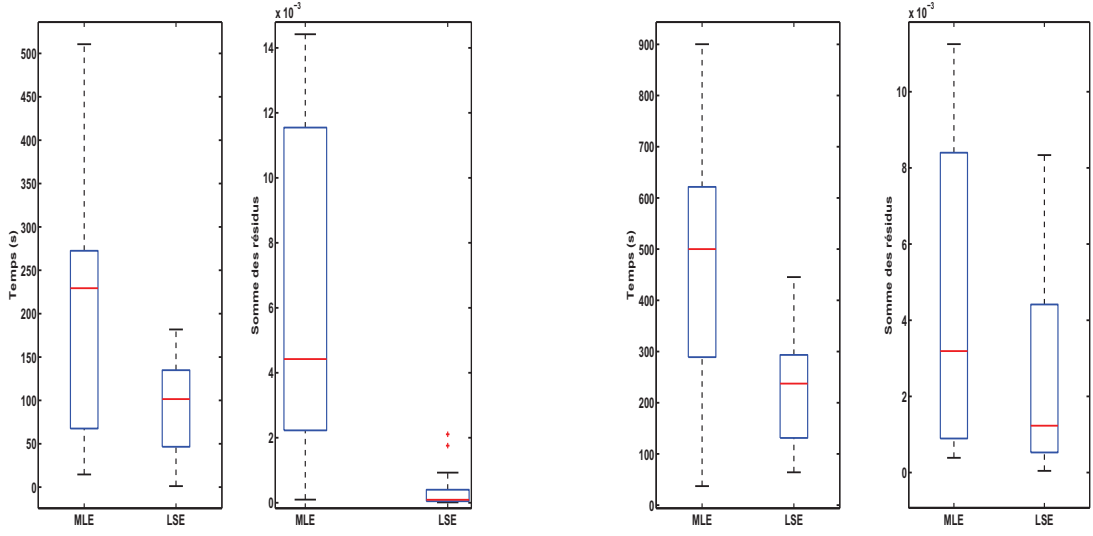
TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres.

Dans le cas d'une densité de probabilité multimodale, la méthode des quantiles et celle de Koutrouvelis ont des performances limitées puisque la densité de probabilité à estimer est supposée unimodale. Par conséquent, nous limitons notre étude à celle des performances du maximum de vraisemblance et de la méthode des moindres carrés. Nous considérons deux exemples :

- une densité de probabilité bimodale (exemple 1 dans la Table 2.1).
- une densité de probabilité avec trois modes (exemple 2 dans la Table 2.1).

Dans les deux cas, on remarque que l'estimation par la méthode des moindres carrés est plus performante que la méthode par maximum de vraisemblance en terme de temps de calcul et de minimisation de l'erreur quadratique (Figure 2.9(a) et Figure 2.9(b)). Nous donnons un exemple de résultats obtenus par les deux méthodes et pour les deux exemples (Figure 2.10(b) et Figure 2.10(a)).

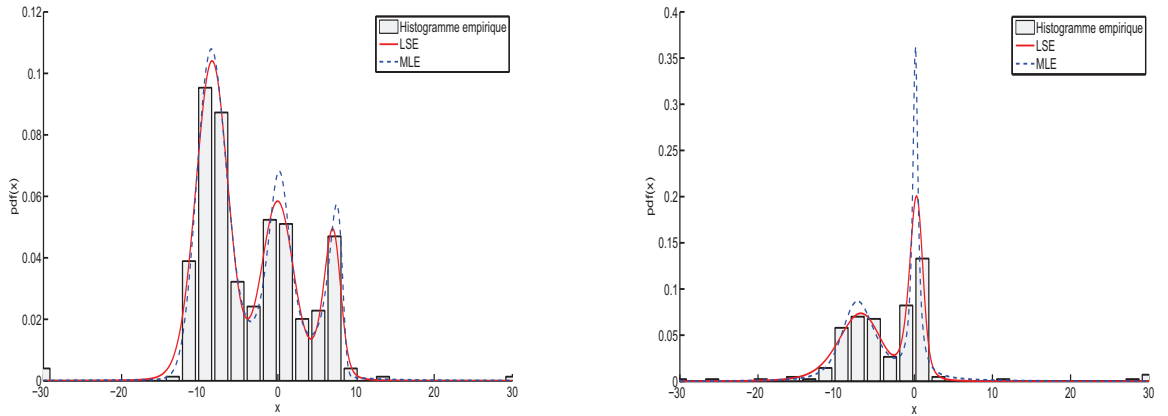
Dans cette section, nous avons présenté les définitions et méthodes d'estimation des paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable unimodale et multimodale monodimensionnelle. Les distributions  $\alpha$ -stables permettent de modéliser les phénomènes de queue lourde et d'asymétrie d'une variable aléatoire. Un des problèmes majeur est l'absence d'expression analytique pour



(a) Performances des estimateurs pour le cas de la densité de probabilité à deux modes.

(b) Performances des estimateurs pour le cas de la densité de probabilité à trois modes..

FIGURE 2.9 – Boîtes de Tukey représentant les performances de la méthode des moindres carrés et de la méthode du maximum de vraisemblance.



(a) Exemple d'une réalisation avec trois modes.

(b) Exemple d'une réalisation avec deux modes.

FIGURE 2.10 – Comparaison entre le MLE et le LSE dans le cas d'un mélange de distributions.

la fonction de densité de probabilité, sauf pour les lois Gaussienne, de Cauchy et de Lévy. En terme d'estimation, l'algorithme de Koutrouvelis est le plus utilisé puisqu'il permet d'obtenir de meilleures performances en termes de consistance, de biais et d'efficacité. En pratique, la méthode par maximum de vraisemblance est peu utilisée à cause de l'expression de la densité de probabilité. Nous avons développé l'algorithme des moindres carrés adapté aux lois  $\alpha$ -stables. L'algorithme des moindres carrés est un bon compromis entre minimisation de la somme des résidus et temps de calcul. Il sera notamment utilisé pour estimer les données dans le chapitre 4. La méthode des moindres carrés et du maximum de vraisemblance permet d'estimer des mélanges de distributions  $\alpha$ -stables, contrairement aux méthodes des quantiles et de la fonction caracté-

ristique. L'objectif de la section suivante est d'étendre les définitions et méthodes d'estimation au cas de distributions  $\alpha$ -stables multidimensionnelles.

## 2.3 Distributions $\alpha$ -stables multidimensionnelles

Dans cette section, nous exposons les définitions des distributions  $\alpha$ -stables multivariées. Les ouvrages [160, 213] présentent les principales définitions exposées ci-dessous.

### 2.3.1 Définition

#### 2.3.1.1 Définition de la stabilité

Il est possible d'étendre les distributions  $\alpha$ -stables dans  $\mathbb{R}^d$ . Les définitions sont similaires au cas monodimensionnel.

**Définition 2.3.1.** Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est stable dans  $\mathbb{R}^d$  si  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $c \in \mathbb{R}^+$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^d$  tels que :

$$a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 = c\mathbf{X} + \mathbf{D} \quad (2.53)$$

où  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  sont deux vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués et de même loi que  $\mathbf{X}$ .

Une définition de la stabilité à partir de la fonction caractéristique peut être utilisée.

**Définition 2.3.2.** Le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  est stable dans  $\mathbb{R}^d$ , noté  $\mathbf{X} \sim S_{\alpha,d}(\sigma^s, \boldsymbol{\delta})$ , si sa fonction caractéristique s'écrit sous la forme :

$$\phi_{S_{\alpha,d}(\sigma^s, \boldsymbol{\delta})}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \exp \left( - \int_{S^d} \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle |^\alpha (1 - j \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) \sigma^s(ds) + j \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{t} \rangle \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp \left( - \int_{S^d} \langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle | (1 + j \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle) \ln(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle)) \sigma^s(ds) + j \langle \boldsymbol{\delta}, \mathbf{t} \rangle \right) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

avec

- $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|x\| = 1\}$ .
- $\sigma^s$  est une mesure finie sur la sphère unité  $S^{d-1}$  appelée mesure spectrale.
- $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^d$ .
- $\langle ., . \rangle$  correspond au produit scalaire dans l'espace euclidien.

*Remarque 2.3.1.* En pratique, il est difficile de représenter les distributions  $\alpha$ -stables multivariées. Cependant, il est possible de travailler avec une mesure spectrale discrète [163]. Une mesure spectrale discrète s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma^s(.) = \sum_{i=1}^{N_s} \gamma_i \delta_{s_i}(.) \quad (2.55)$$

où  $\gamma_i$  correspond à des poids et  $\delta_{s_i}$  est une mesure de Dirac. Dans le cas d'une densité de probabilité à 2 dimensions avec  $N_s$  points de masse,  $s_i = \{\cos(\vartheta_i), \sin(\vartheta_i)\}$ , avec  $\vartheta_i = \frac{2\pi(i-1)}{N_s}$ .

### 2.3.1.2 Densité de probabilité

Dans [163], la densité de probabilité s'exprime de la manière suivante :

$$f_{S_{\alpha,d}(\sigma^s, \delta)}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{S^d} \cos[\langle \mathbf{x}, \mathbf{t} \rangle + \Im(I_X(\mathbf{t}))] \exp(-\Re(I_X(\mathbf{t}))) dt \quad (2.56)$$

avec

$$I_X(\mathbf{t}) = \begin{cases} \int_{S^d} |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|^\alpha (1 - j \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) \sigma^s(ds) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \int_{S^d} |\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle| (1 + j \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle) \ln(|\langle \mathbf{t}, \mathbf{s} \rangle|)) \sigma^s(ds) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Par soucis de représentation, nous travaillons dans  $\mathbb{R}^2$  [167].

### 2.3.1.3 Simulation de vecteurs aléatoires stables

Il est possible de générer un vecteur aléatoire stable dans  $\mathbb{R}^d$ . Les auteurs [157] font l'hypothèse d'une densité spectrale discrète. Le vecteur aléatoire stable  $\mathbf{X}$  s'obtient par :

$$\mathbf{X} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_s} (\sigma_i^s)^{\frac{1}{\alpha}} V_i \mathbf{s}_i + \boldsymbol{\delta} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \sum_{i=1}^{N_s} \sigma_i^s (V_i + \frac{2}{\pi} \ln(\sigma_i^s) \mathbf{s}_i) + \boldsymbol{\delta} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

avec  $V_1, \dots, V_K$  des variables aléatoires stables indépendantes et identiquement distribuées, normalisées et totalement asymétriques à droite, c'est-à-dire que  $V_i$  est du type  $S_\alpha(1, 1, 0)$ .

## 2.3.2 Estimation des paramètres

Il est généralement difficile d'estimer les distributions  $\alpha$ -stables multidimensionnelles à cause de la mesure spectrale continue. Cependant, le problème peut se simplifier si l'on choisit une mesure spectrale discrète. Dans [137], l'auteur énumère différentes méthodes permettant d'estimer une densité de probabilité  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$ . Cependant, deux méthodes sont principalement utilisées :

- l'une est fondée sur la fonction caractéristique empirique, appelée méthode ECF [166].
- l'autre se fonde sur des projections, appelée méthode PROJ [150].

Nous présentons ces deux méthodes ci-dessous.

### 2.3.2.0.a Méthode de la fonction caractéristique

La méthode de la fonction caractéristique empirique [166] consiste à minimiser la distance euclidienne entre les valeurs empiriques et les valeurs réelles de la fonction caractéristique. Mathématiquement, cette méthode est définie par :

Considérons un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  de dimension  $d$  constitué de  $n$  échantillons (par exemple  $\mathbf{X}_1 = [x_1^1, \dots, x_1^d]'$ ). Les données à estimer sont donc  $\alpha$  et  $\boldsymbol{\gamma}$ , puisque l'on discrétise l'espace  $S^d$  pour définir les  $s_i$ . Tout d'abord, la quantité  $\alpha$  est calculée de la manière suivante : on considère que chaque dimension  $i$  de  $X$  (par exemple le vecteur  $[x_1^i, \dots, x_n^i]$ ) est une variable aléatoire stable dont on calcule les paramètres  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  et  $\delta_i$ . Nous obtenons la quantité  $\alpha = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \alpha_i$ . La fonction caractéristique empirique est déterminée par :

$$\hat{\phi}(\mathbf{t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(j \langle \mathbf{t}, \mathbf{X}_i \rangle) \quad (2.59)$$



ainsi que la fonction d'exposant empirique par :

$$\hat{I}(\mathbf{t}) = -\ln(\phi(\mathbf{t})) \quad (2.60)$$

On fixe un nombre  $L$  de points tels que  $\forall l \in [1, L], t_l \in S^d$ . Pour calculer la quantité  $\sigma^{spec}$ , il faut résoudre le système  $\hat{I} = \Psi \sigma^{spec}$  avec :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(< t_1, s_1 >) & \dots & \psi_\alpha(< t_1, s_L >) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_\alpha(< t_L, s_1 >) & \dots & \psi_\alpha(< t_L, s_L >) \end{pmatrix}$$

et

$$\psi_\alpha(u) = \begin{cases} |u|^\alpha (1 - j \operatorname{sgn}(u) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ |u| (1 + j \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \ln(u)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.61)$$

### 2.3.2.0.b Méthode de projection

La méthode de projection a été proposée par McCulloch [150] et est définie de la manière présentée ci-dessous.

Considérons un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$  de dimension  $d$  constitué de  $n$  échantillons et un nombre  $L$  de points tels que  $\forall l \in [1, L], t_l \in S^d$ . La première étape va être de projeter chaque élément de  $\mathbf{x}$  sur chaque  $t_l$ . On obtient alors  $L$  vecteurs de dimension 1 à  $n$  éléments  $< \mathbf{t}_l, \mathbf{X} > = [< \mathbf{t}_l, \mathbf{X}_1 >, \dots, < \mathbf{t}_l, \mathbf{X}_n >]$ . Ces vecteurs sont considérés comme des variables aléatoires stables. Il est donc possible de calculer, pour chaque projection sur  $\mathbf{t}_l$ , les  $\alpha(\mathbf{t}_l)$ ,  $\beta(\mathbf{t}_l)$ ,  $\gamma(\mathbf{t}_l)$  et  $\delta(\mathbf{t}_l)$  correspondant. On obtient une estimation de  $\alpha = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \alpha(\mathbf{t}_l)$ . On calcule pour chaque  $\mathbf{t}_l$  la quantité suivante :

$$I(\mathbf{t}_l) = \begin{cases} \gamma^\alpha(\mathbf{t}_l) (1 - j \beta(\mathbf{t}_l) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \gamma(\mathbf{t}_l) (1 - j \delta(\mathbf{t}_l)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.62)$$

Il suffit ensuite de résoudre le même système utilisé avec la méthode ECF.

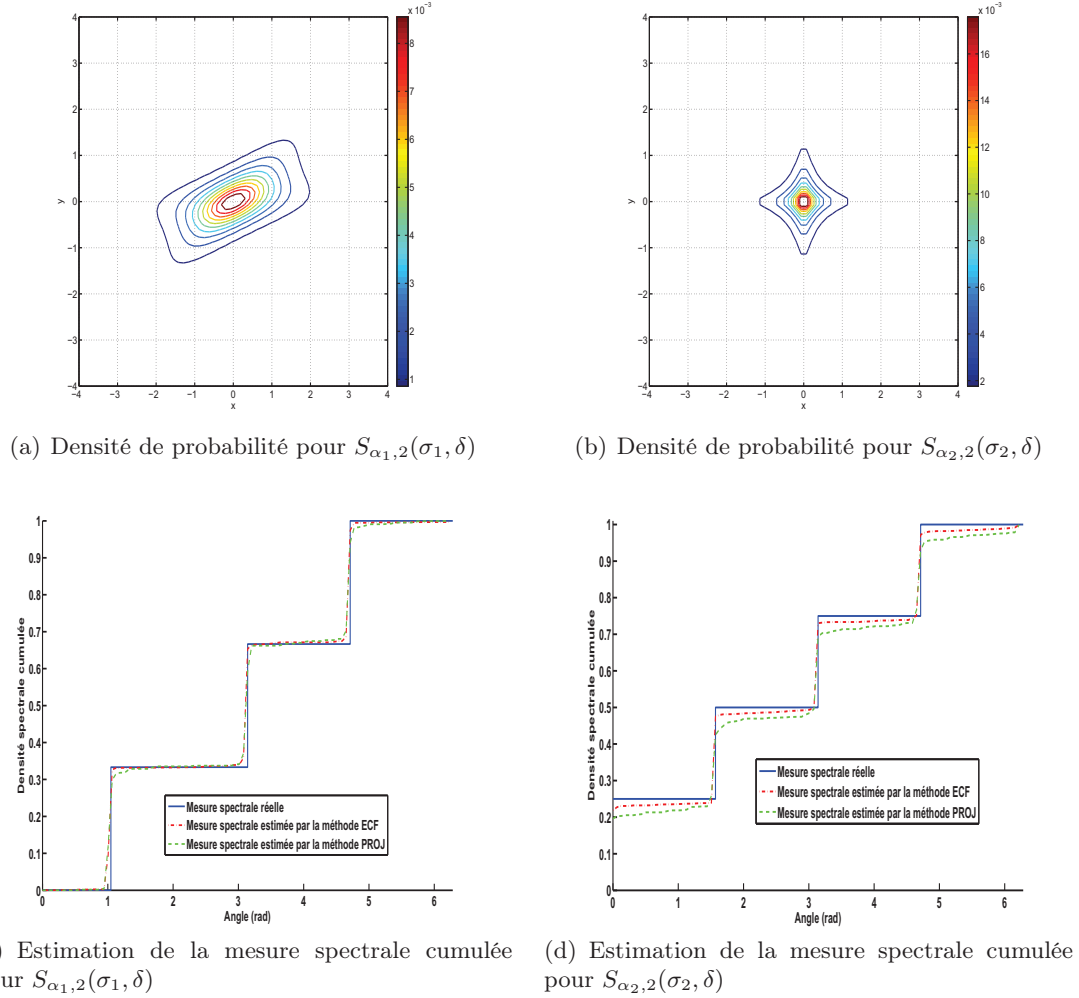
*Remarque 2.3.2.* La résolution du système peut donner des valeurs de  $\sigma^{spec}$  complexes. Ce problème est soulevé dans [166] et suggère de minimiser la quantité :

$$\|\mathbf{I} - \Psi \sigma^{spec}\| \text{ tel que } \sigma^{spec} \geq 0 \quad (2.63)$$

### 2.3.2.0.c Application au cas bidimensionnel

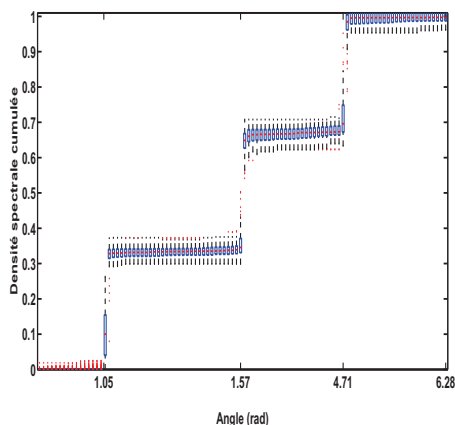
Par un soucis de représentation, nous nous limitons dans cette partie au cas bidimensionnel. Plusieurs exemples sont donnés dans [167]. Nous présentons deux exemples de distributions  $\alpha$ -stables bidimensionnelles (*c.f.* Table 2.2) centrés en 0 (*i.e.*  $\boldsymbol{\delta} = [0 \ 0]'$ ). Un vecteur de 5000 échantillons est généré à partir de [157] pour chaque distribution. L'estimation des différentes distributions se fait en choisissant 12 points de masse, c'est-à-dire que chaque point est séparé de  $30^\circ$  de son suivant sur le cercle unité. Les courbes de niveaux sont présentées en Figure 2.11. On considère deux densités de probabilité  $\alpha$ -stables bidimensionnelles. Nous représentons la mesure spectrale cumulée réelle avec la mesure spectrale cumulée estimée. Il est difficile de comparer les différents estimateurs de mesure spectrale puisqu'on discrétise nos points de masse. Nous comparons les résultats d'estimation des paramètres  $\alpha$  et de la mesure spectrale à partir d'une

	$\alpha$	$\vartheta$	$\sigma^{spec}$
$S_{\alpha_{1,2}}(\sigma_1, \delta)$	1,25	$(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3})$	$(\frac{\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2})$
$S_{\alpha_{2,2}}(\sigma_2, \delta)$	0,75	$(0,25 \quad 0,25 \quad 0,25 \quad 0,25)$	$(0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2})$

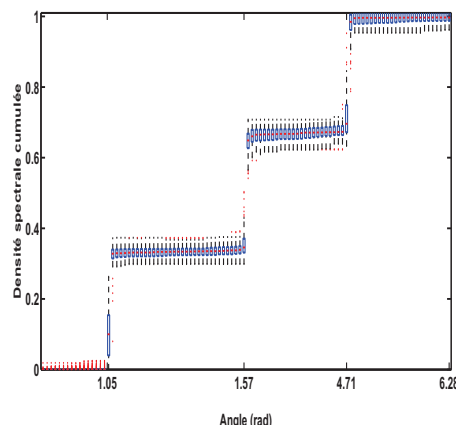
 TABLE 2.2 – Paramètre  $\alpha$  et mesures spectrales.

 FIGURE 2.11 – Isocontours des densités de probabilité d'une loi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^2$  ainsi que les densités spectrales réelles et estimées par les méthodes PROJ et ECF.

boîte de Tukey. La procédure d'estimation est répétée 100 fois sur des échantillons indépendants de même loi.

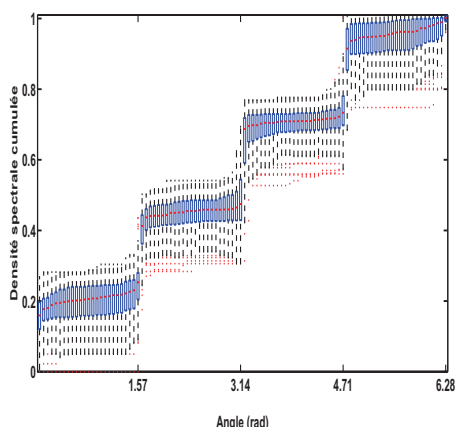
Nous pouvons remarquer que les mesures spectrales cumulées moyennées obtenues par les méthodes PROJ et ECF sont satisfaisantes lorsqu'on les compare aux mesures spectrales réelles (Figure 2.12). Cependant, il est possible d'observer une différence pour le cas  $S_{\alpha_{1,2}}(\sigma_2, \delta)$  qui s'explique par la discrétisation.



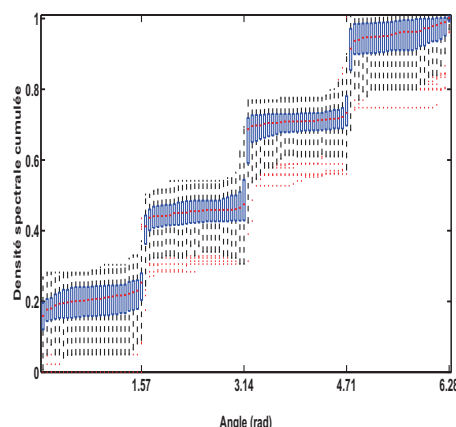
(a) Estimation de la mesure spectrale cumulée pour  $S_{\alpha_1,2}(\sigma_2, \delta)$  par la méthode ECF



(b) Estimation de la mesure spectrale cumulée pour  $S_{\alpha_1,2}(\sigma_2, \delta)$  par la méthode PROJ



(c) Estimation de la mesure spectrale cumulée pour  $S_{\alpha_2,2}(\sigma_1, \delta)$  par la méthode ECF



(d) Estimation de la mesure spectrale cumulée pour  $S_{\alpha_2,2}(\sigma_2, \delta)$  par la méthode PROJ

FIGURE 2.12 – Boîtes de Tukey des paramètres  $\alpha$  et mesures spectrales pour chaque densité à partir des méthodes PROJ et ECF.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une classe particulière de distributions statistiques : les distributions  $\alpha$ -stables. Ce sont des distributions permettant de prendre en compte les notions d'asymétrie et de queue lourde. Les distributions de Gauss, de Cauchy et de Lévy sont des cas particuliers de distributions  $\alpha$ -stables. Les distributions  $\alpha$ -stables satisfont le théorème de la limite centrale généralisé, qui est une extension du théorème de la limite centrale dans le cas Gaussien. L'un des inconvénients des distributions  $\alpha$ -stables réside dans l'expression de sa fonction de densité de probabilité. En effet, elle est calculée à partir d'un calcul d'intégrale aux bornes infinies d'une fonction complexe.

Il existe quatre grandes familles d'estimateurs permettant d'estimer une variable aléatoire  $\alpha$ -stable unimodale : la méthode des quantiles, la méthode utilisant la fonction caractéristique, le maximum de vraisemblance et la méthode des moindres carrés. La méthode par maximum de vraisemblance est très peu utilisée car elle est coûteuse en temps de calcul. La méthode utilisant la fonction caractéristique proposée par Koutrouvelis semble être un meilleur algorithme lorsque l'on prend en compte le temps de calcul et la qualité de l'estimation que celui de la

méthode des quantiles proposée par McCulloch. Curieusement, nous n'avons pas retrouvé de méthodes utilisant les moindres carrés dans la littérature. Cette méthode a été programmée et nous constatons qu'elle permet de bien minimiser l'erreur quadratique lorsqu'on la compare aux autres méthodes. L'un des avantages du maximum de vraisemblance et de la méthode des moindres carrés est qu'il est possible d'estimer des distributions multimodales. Dans le cas multimodale, nous avons adapté l'algorithme EM et la méthode par maximum de vraisemblance au cas d'un mélange de distributions  $\alpha$ -stables. Nous avons aussi développé une méthode par moindres carrés permettant d'obtenir un bon compromis entre temps de calcul CPU et minimisation de la somme des résidus.

Les distributions  $\alpha$ -stables ont été généralisées dans  $\mathbb{R}^d$ . Il existe deux méthodes utilisant un maillage de  $\mathbb{R}^d$  pour estimer les paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^d$  : une méthode de projection et une méthode utilisant la fonction caractéristique empirique. Ces deux méthodes sont similaires en temps de calcul et en résultats d'estimation.

Dans les deux chapitres suivants, les distributions  $\alpha$ -stables sont utilisées afin de modéliser les signaux non-gaussiens issus des capteurs sonar ou radar. Les lois  $\alpha$ -stables sont calculées à partir de la définition de la fonction caractéristique de Zolotarev. Dans le chapitre 3, l'estimation des paramètres est réalisée à partir de l'algorithme de Koutrouvelis dans le cas monodimensionnel et de la méthode PROJ dans le cas multidimensionnel. Dans le chapitre 4, la méthode des moindres carrés est utilisée pour estimer la densité de probabilité du champ électromagnétique diffusé par une surface maritime. Ce choix a été réalisé car les erreurs d'estimation peuvent avoir des répercussions sur les performances de détection : la méthode des moindres carrés permet de minimiser la somme des résidus.



## Chapitre 3

# Classification sédimentaire des fonds marins

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Techniques de classification</b>	<b>59</b>
3.2.1	Méthodes classiques	59
3.2.1.1	Méthode Bayésienne	59
3.2.1.2	Méthode des $k$ plus proches voisins	60
3.2.1.3	Réseau de neurones	60
3.2.2	Théories de l'incertain	62
3.2.2.1	Théorie des probabilités imprécises	62
3.2.2.2	Théorie des possibilités	62
3.2.2.3	Théorie des fonctions de croyance	63
<b>3.3</b>	<b>Classification suivant la théorie des fonctions de croyance</b>	<b>76</b>
3.3.1	Classification de données générées	77
3.3.1.1	Cas Gaussien	77
3.3.1.2	Cas $\alpha$ -stable	79
3.3.2	Classification de données réelles	84
3.3.2.1	Présentation des données	84
3.3.2.2	Résultats numériques	86
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>94</b>

---

*Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les distributions  $\alpha$ -stables. Cette classe de distributions a la particularité de représenter les phénomènes d'asymétrie et de queue lourde. Ces phénomènes sont observables notamment dans le cas de données issues d'un sondeur mono-faisceau. Nous proposons une méthode de classification supervisée basée sur une modélisation des attributs via une densité de probabilité de type  $\alpha$ -stable. Nous introduisons des méthodes que nous qualifions de répandues tels que la méthode Bayésienne, la méthode des  $k$  plus proches voisins et les réseaux de neurones. Chaque attribut fournit une information différente pour chacune des classes. Il y a donc une imprécision et une incertitude sur les données. Cependant, il est possible de prendre en compte ces notions à partir de théories dites de l'incertain telles que la théorie des probabilités imprécises, la théorie des possibilités ou la théorie des fonctions de croyance. Dans ce chapitre, nous exposons plus en détails la théorie des fonctions de croyance du fait de sa souplesse d'utilisation. Tout d'abord, nous présentons le formalisme de la théorie des fonctions de croyance dans le cas discret puis son extension au cas continu.*

*Ensuite, nous appliquons ce formalisme au cas de la classification de données générées et réelles. Dans un premier temps, nous introduisons les données sur lesquelles seront effectuées la classification. Nous montrons que le choix de modèle s'avère primordiale dans le cadre d'une problématique de classification par modèle statistique. Nous comparons les résultats obtenus avec la méthode par la théorie des fonctions de croyance avec ceux obtenus par une approche Bayésienne. Il sera intéressant de regarder l'influence du modèle d'estimation pour chaque méthode.*

### 3.1 Introduction

La classification automatique de sédiments marins est à l'origine de nombreuses applications comme la cartographie sous-marine, la prospection minière, la détection de mine, la pêche... Il est possible de travailler soit à partir du signal brut issu directement du capteur, soit à partir de l'image obtenue.

Des logiciels ont notamment été commercialisés à cet effet comme les logiciels QTC-View [179] développé par le Quester Tangent Corporation of Sydney BC, Canada, qui utilise une approche fondée sur le premier écho, et RoxAnn [38] développé par le Marine Micro System of Aberdeen, Écosse, qui utilise l'énergie des deux premiers échos. Le système RoxAnn permet de caractériser les natures de fond grâce au traitement du signal acoustique reçu par un sondeur bathymétrique. Les informations fournies sont des coefficients de dureté et de rugosité des fonds. Après calibration, ils sont traduits en nature de sédiments. Le logiciel QTC-View utilise l'information fournie par le premier écho. Il peut fonctionner en mode supervisé ou non supervisé. Le logiciel calcule 166 paramètres qu'il combine à partir d'une Analyse en Composante Principale (ACP). Ces deux logiciels ont été comparés par Hamilton [94]. Cependant, nous n'avons pas accès à ces logiciels. Par conséquent, il est donc naturel de choisir une méthode de classification fondée sur un modèle, où nous modélisons les attributs extraits des signaux bruts par des densités de probabilité.

La plupart des travaux concernant la classification des fonds marins sont fondés sur la notion de texture d'images, introduite par les travaux d'Haralick [95, 96]. Des travaux sur ce sujet ont notamment été réalisés en interne au laboratoire comme ceux développés dans la thèse de Hicham Laanaya [129] où il propose une classification supervisée d'images texturées à partir de méthodes comme les machines à vecteurs de support ou l'algorithme des  $k$  plus proches voisins. La méthode des  $k$  plus proches voisins a aussi été utilisée par Leblond *et al.* [133]. Des méthodes de segmentation ont été proposées (approches qui diffèrent de la classification car on n'a pas d'*a priori* sur les classes) comme par Karoui [110] où les paramètres de textures pertinents sont sélectionnés à partir d'un critère de similarité, ou par Le Chenadec [131] où il segmente des images sonar en utilisant deux descripteurs énergétiques et statistiques appliqués à un algorithme combinant les méthodes par machines à vecteurs de support dans un cadre markovien. Récemment, Williams [231] propose une approche Bayésienne afin d'effectuer une classification multi-vues des fonds marins. L'auteur modélise des attributs par des mélanges de Gaussiennes qu'il va ensuite combiner pour effectuer la classification. Ces méthodes font intervenir la notion de probabilité *a priori*, qu'il est parfois difficile à définir. Dans la suite de ce chapitre, nous exposons une liste non exhaustive de méthodes de classification répandues.

La classification est effectuée sur différents attributs considérés comme issus de capteurs différents. Chaque capteur ne donne pas la même information, ce qui engendre de l'ignorance caractérisée par deux phénomènes : l'imprécision et l'incertitude. Ces notions peuvent être prises en compte par les théories de l'incertain comme par exemple la théorie des ensembles flous [63], la théorie des possibilités [235], la théorie des fonctions de croyance [50, 197]. . . Dans ce travail, la théorie des fonctions de croyance est utilisée pour sa simplicité de programmation. Les travaux de Demspter [50] puis Shafer [197] ont permis d'établir les bases mathématiques de cette théorie.

Smets [204] a repris les travaux de Dempster et Shafer pour développer la théorie des fonctions de croyance transférables en introduisant notamment la transformation pignistique indispensable à l'étape de décision. La théorie des fonctions de croyance a d'abord été développée au cas où l'espace de décision est discret. Strat [209] puis Smets [202] ont étendu le formalisme des fonctions de croyance au cas continu. Il convient donc dans la suite de ce chapitre de présenter la théorie des fonctions de croyance discrètes et continues. Des approches utilisant la théorie des fonctions de croyance ont déjà été employées pour effectuer la classification de fonds marins à partir de la fusion de classifieurs [129, 144] ou pour effectuer du recalage d'images [188]. La classification de sédiments marins à partir de la théorie des fonctions de croyance continues a récemment été abordée [57, 80]. Le but est de modéliser des attributs définis sur un espace continu s'exprimant sur un ensemble de classes définies à partir d'une densité de probabilité. L'une des propriétés intéressante recherchée par les auteurs est de considérer une fonction de croyance consonante. Par exemple, Smets [202] se propose de déterminer la densité de masse de moindre engagement associée à une densité de probabilité unimodale et univariée (qu'il qualifie de *bell-shaped*). L'approche pratique a été initiée par Ristic *et al.* [184, 186] où les auteurs classifient des données cinématiques modélisées par des Gaussiennes. Caron *et al.* [35] ont étendu l'expression de la densité de masse de moindre engagement associée à des Gaussiennes et des mélanges de Gaussiennes dans  $\mathbb{R}^n$ . L'approche de Caron *et al.* [35] a notamment été appliquée pour modéliser des paramètres de textures extraits d'images sonar à partir d'un modèle de mélanges de Gaussiennes. Elle a notamment été utilisée pour classifier des sédiments marins [80]. Cependant, l'approche de Smets présente des limites notamment pour prendre en compte des éléments focaux disjoints. Doré *et al.* [56, 58] ont proposé de décrire les éléments focaux à partir de fonctions d'indices appliqués à une problématique de classification de sédiments marins [57]. Les paramètres de texture utilisés dans [80] ont été aussi estimés à partir d'un mélange de distributions  $\alpha$ -stables [79] puis comparés à un mélange de Gaussiennes en construisant les fonctions de masse à partir de fonctions indices. Les résultats obtenus ne permettent pas de conclure quand à la pertinence du modèle  $\alpha$ -stable par rapport au modèle Gaussien. En effet, il est possible d'estimer correctement n'importe quelle densité de probabilité à partir d'un nombre fixé de composantes constituant le mélange. Par conséquent, les données considérées dans la section 3.3 sont unimodales pour montrer l'intérêt d'estimer des données à partir d'un modèle  $\alpha$ -stable par rapport à un modèle Gaussien.

## 3.2 Techniques de classification

Dans cette section, nous exposons différentes méthodes de classification. Tout d'abord, nous développons des méthodes de classification répandues comme la méthode Bayésienne, la méthode des  $k$  plus proches voisins et les réseaux de neurones. Ensuite, nous introduisons des méthodes de classification qualifiées d'incertaines comme les probabilités imprécises, la théorie des possibilités et la théorie des fonctions de croyance.

### 3.2.1 Méthodes classiques

#### 3.2.1.1 Méthode Bayésienne

La méthode Bayésienne [64] est issue de la théorie des probabilités. Comme son nom l'indique, elle est fondée sur le théorème de Bayes et a pour but de déterminer la classe d'appartenance d'un vecteur test  $x$ . Dans un problème à  $K$  classes, la règle de Bayes permet de calculer les



probabilités *a posteriori* au point  $x$  :

$$p(C_i/x) = \frac{p(x/C_i)p(C_i)}{\sum_{m=1}^K p(x/C_m)p(C_m)} \quad (3.1)$$

avec  $p(C_i)$  correspondant à la probabilité *a priori* de la classe  $C_i$ . La probabilité *a priori* est difficile à déterminer mais on la calcule comme étant le rapport d'éléments appartenant à une classe sur le nombre total de vecteurs. La décision est choisie en calculant le maximum des probabilités *a posteriori*. La mesure de probabilité modélise l'incertitude mais représente très mal l'imprécision. L'incertitude dans l'approche Bayésienne se traduit par le fait qu'il est difficile de prévoir le résultat final d'une expérience aléatoire. L'une des limites de l'approche Bayésienne est qu'on travaille nécessairement en monde fermé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas prendre une décision autre que celle prévue par les classes annoncées.

### 3.2.1.2 Méthode des $k$ plus proches voisins

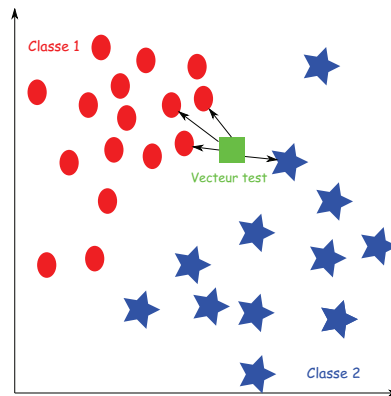


FIGURE 3.1 – Schéma décrivant la méthode des  $k$  plus proches voisins.

La méthode des  $k$  plus proches voisins [64] (que l'on notera aussi k-ppv) s'appuie sur une mesure de distance  $f$  permettant de choisir les  $k$  plus proches voisins du vecteur  $x$  à classer. Cet algorithme est l'un des plus simples en classification. La classe affectée au vecteur test  $x$  est celle qui obtient le plus grand nombre d'occurrences parmi les étiquettes des  $k$  plus proches voisins de  $x$  (Figure 3.1). Lors de l'implémentation de cette méthode, il est donc nécessaire de fixer le paramètre  $k$  ainsi que la distance à utiliser. Le problème de cette méthode est le temps de calcul lorsqu'il faut explorer les  $k$  plus proches voisins en calculant toutes les distances des données présentes.

La méthode des  $k$  plus proches voisins a été étendue au cas flou [112] (k-ppv flou) et crédibiliste [53] (k-ppv crédibiliste).

### 3.2.1.3 Réseau de neurones

Le réseau de neurones est une méthode de classification développée dans les années 40 par McCulloch et Pitts [151]. Le réseau de neurones simule le mode de fonctionnement du neurone biologique (voir Figure 3.2 issue de <sup>1</sup>). Les neurones biologiques sont reliés entre eux par les axones. Les axones jouent un rôle important car ils véhiculent les signaux électriques de la sortie

1. <http://www.cours-pharmacie.com/physiologie/systeme-nerveux.html>

d'un neurone vers l'entrée (synapse) d'un autre neurone. En général, un neurone a pour fonction de sommer plusieurs signaux électriques qu'il reçoit en entrée et suivant le résultat, fournit en sortie un courant. Un neurone biologique est constitué de trois parties :

- le soma qui correspond au centre du neurone
- l'axone qui conduit les impulsions électriques
- les dendrites qui reçoivent les impulsions des autres neurones.

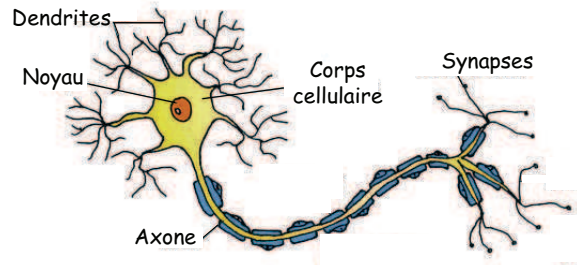


FIGURE 3.2 – Schéma d'un neurone biologique.

Neurone biologique	Neurone formel
Synapses	poids synaptiques
Axone	Signal de sortie
Dendrite	Signal d'entrée
Somma	Fonction d'activation

TABLE 3.1 – Analogie entre le neurone formel et biologique

Il est possible de faire une analogie entre le neurone formel et biologique (Tableau 3.1). Un neurone formel est une fonction algébrique paramétrée, à valeurs bornées, de variables réelles appelées entrées. Le calcul de la valeur de cette fonction se décompose en deux étapes (Figure 3.3). Tout d'abord, le neurone calcule une combinaison linéaire des entrées  $\mathbf{X}$  :

$$v = \mathbf{w}^t \mathbf{X} + w_0 \quad (3.2)$$

avec  $\mathbf{w}$  appelé poids synaptiques et  $w_0$  le biais. La quantité  $v$  est appelée potentiel du neurone. Lorsque  $v$  est supérieur à une valeur seuil prédéfinie  $s_e$ , le neurone est alors dit actif. La sortie du neurone est évaluée en calculant la quantité  $y = f(v)$ , avec  $f$  une fonction d'activation. Il existe plusieurs fonctions d'activation [59] comme la fonction sigmoïde, la fonction tangente hyperbolique... Le signal de sortie ainsi obtenu peut être binaire (0 ou 1), bipolaire (-1 ou 1) ou réelle.

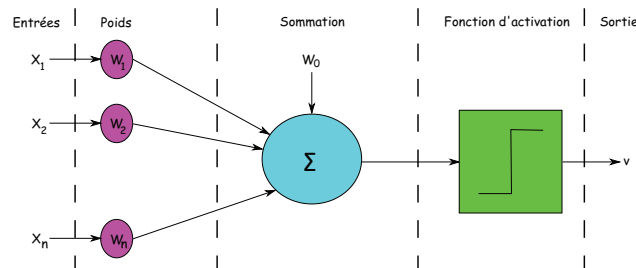


FIGURE 3.3 – Schéma d'un neurone formel

Il est possible d'interpréter l'équation (3.2). Considérons un problème à  $N$  entrées. Si le produit scalaire entre  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{X}$  est positif, le point  $\mathbf{X}$  appartient à la classe  $+1$ , sinon il appartient à la classe  $-1$ . Par conséquent, l'hyperplan défini par la normale  $\mathbf{w}$  et la distance à l'origine  $w'_0 = w_0 - s_e$  fait une séparation linéaire des points  $\mathbf{X}$  en deux classes.

Il existe plusieurs architectures pour représenter un réseau de neurones. Le plus connu est appelé le perceptron multicouches introduit par Rosenbrat [189]. Les connexions entre les différents neurones se font entre les couches adjacentes. Les neurones d'une même couche ne sont pas connectés entre eux. Le réseau de neurones se décompose souvent en trois couches : une couche d'entrée (la rétine), fournissant des données à une couche intermédiaire, chargée des calculs, cela en fournissant la somme des impulsions qui lui viennent des cellules auxquelles elle est connectée, et elle répond généralement suivant une loi définie avec un seuil, elle-même connectée à la couche de sortie (couche de décision), représentant les exemples à mémoriser. Seule cette dernière couche renvoie des signaux à la couche intermédiaire, jusqu'à ce que leurs connexions se stabilisent. D'autres modèles ont été proposés comme celui de Hopfield [103] ou de Kohonen [120].

Dans ce type de méthodes, la phase d'apprentissage est très importante pour la classification. Le comportement du neurone va être modifié au cours du temps jusqu'à obtention des valeurs de sortie du neurone les plus proches. Dans le cas du perceptron multicouches, l'apprentissage se fait à partir d'un algorithme de rétro-propagation du gradient de l'erreur. L'objectif de cet algorithme est de trouver les poids synaptiques qui minimisent l'erreur quadratique moyenne commise par le réseau sur l'ensemble d'apprentissage.

### 3.2.2 Théories de l'incertain

Les méthodes présentées précédemment sont limitées pour représenter les notions d'imprécision et/ou d'incertitude des données. Cependant, il est possible de prendre en compte ces notions à partir des théories de l'incertain. Nous présentons donc une liste non exhaustive de théorie de l'incertain, en détaillant la théorie des fonctions de croyance que nous utilisons par la suite.

#### 3.2.2.1 Théorie des probabilités imprécises

La probabilité réelle peut être parfois difficile à déterminer lorsque nous ne disposons pas assez d'informations pour caractériser cette probabilité. Cependant, il est possible de contourner le problème en encadrant la vraie probabilité par une probabilité supérieure  $\overline{P}$  et une probabilité inférieure  $\underline{P}$  : cette théorie est appelée la théorie des probabilités imprécises introduite par Peter Valley [223]. Lorsque la probabilité d'un phénomène est déterminée de manière précise, les probabilités inférieures et supérieures sont égales. Dans le cas où il n'y a pas de connaissance sur la probabilité d'un événement  $A$ , la probabilité inférieure vaut  $\underline{P} = 0$  et la probabilité supérieure vaut  $\overline{P} = 1$ . Le formalisme de cette théorie est lourd à manipuler.

#### 3.2.2.2 Théorie des possibilités

La théorie des possibilités est issue des travaux de Zadeh [235] sur la théorie des sous-ensembles flous. La théorie des possibilités a été repris en France par Dubois et Prade [61]. Elle permet notamment de représenter l'imprécision et l'incertitude. La théorie des possibilités permet notamment de manipuler l'incertitude attribuée à des mots en langage naturel comme "taille moyenne". En effet, l'agent doit alors définir à partir de quelles valeurs un individu peut être considéré de "taille moyenne". Cette théorie s'appuie essentiellement sur deux mesures permettant de décrire l'incertitude d'un événement :

- la mesure de possibilité

– la mesure de nécessité

**Définition 3.2.1.** Une distribution de possibilité [61]  $\Pi$  est une application de  $\mathcal{P}(\Omega)$  représentant l'ensemble des parties de  $\Omega$  dans  $[0,1]$ ,  $\exists A \in \Omega$  tel que  $\Pi(A) = 1$ .

En d'autres termes, lorsque la possibilité d'un événement est proche de 1, cela signifie que cet événement est possible. Dans le cas contraire, c'est-à-dire que la possibilité d'un événement est proche de 0, on dira que cet événement est impossible. Il est possible de construire une mesure de possibilité à partir d'une distribution de possibilité :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \Pi(x) \quad (3.3)$$

$$\forall A, B \subset \Omega, \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (3.4)$$

La mesure de possibilité ainsi construite définit une probabilité haute dominant un ensemble de distributions de probabilité.

La mesure de possibilité est une mesure non-additive, au contraire d'une mesure de probabilité. Par exemple, un événement  $A$  et son contraire  $\bar{A}$  sont tous les deux possibles, ce qui induit que  $\Pi(A) = 1$  ou  $\Pi(\bar{A}) = 1$ , alors qu'avec la théorie des probabilités, la probabilité d'un événement est totalement déterminée par son événement contraire puisque  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ . Dans ce cas, on introduit une ambiguïté puisque les deux événements sont réalisables. Pour lever cette ambiguïté, on introduit la mesure de nécessité qui permet de quantifier l'impossibilité de l'événement contraire. La mesure de nécessité correspond au dual de la mesure de possibilité.

**Définition 3.2.2.** Une distribution de nécessité [61]  $N$  est une application de  $\mathcal{P}(\Omega)$  représentant l'ensemble des parties de  $\Omega$  dans  $[0,1]$ ,  $\exists A \in \Omega$  tel que  $N(A) = 1$ .

Une mesure de nécessité est définie à partir d'une distribution de nécessité :

$$N(A) = \inf_{x \in A} N(x), N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) \quad (3.5)$$

$$\forall A, B \subset \Omega, N(A \cap B) = \min(\Pi(A), \Pi(B)) \quad (3.6)$$

La mesure de possibilité ainsi construite définit une probabilité basse minorant un ensemble de distributions de probabilité.

Reprenons l'exemple sur la taille. D'un point de vue pratique, l'expert fournit l'information suivante : “Je suis certain de définir un individu de la taille moyenne, si la taille est comprise dans l'intervalle  $[1m50; 2m00]$  mais les valeurs les plus vraisemblables appartiennent à l'intervalle  $[1m70; 1m80]$ ”. L'intervalle défini par l'expert où il est certain de trouver la taille “moyenne” est appelée le support, tandis que l'intervalle défini où la taille dite “moyenne” est la plus vraisemblable est appelé noyau (explicité par la Figure 3.4). Ces deux intervalles sont reliés par une fonction affine : on a alors construit une fonction de possibilité trapézoïdale associée à la taille dite “moyenne”. Cette distribution de possibilité peut être interprétée comme un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés défini par les  $\alpha$ -coupes (appelés aussi coupe de niveau  $\alpha$ ). L'intervalle  $I_{\alpha_{cut}}$  pour le niveau  $\alpha_{cut}$  est défini par :

$$I_{\alpha_{cut}} = \{x \in \mathcal{S} | \Pi(x) \geq \alpha_{cut}\} \quad (3.7)$$

### 3.2.2.3 Théorie des fonctions de croyance

Les origines de la théorie des fonctions de croyance proviennent des travaux de Dempster [50] sur les inférences Bayésiennes à la fin des années 60. Le problème de Dempster était de caractériser les échantillons issus d'une population à partir d'une densité de probabilité. Il s'est aperçu

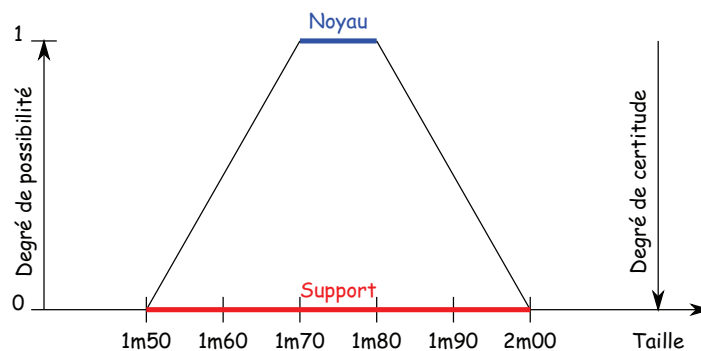


FIGURE 3.4 – Illustration d’une distribution de possibilité.

qu’il existait plusieurs densités de probabilité possibles permettant de modéliser ces échantillons. Il a alors eu l’idée d’encadrer cette densité de probabilité à partir d’une probabilité haute et une probabilité basse.

Dans *A mathematical theory of evidence* [197], Shafer présente les fonctions de croyance comme une représentation des incertitudes. Il introduit le formalisme appelé fonction de masse permettant d’attribuer une croyance à un ensemble d’événements. Il combine plusieurs fonctions de croyance entre elles à partir de la règle de Dempster. Cette théorie prend alors le nom de théorie Dempster-Shafer. Smets [204] reprend les idées de Shafer pour formaliser le concept du modèle des croyances transférables (MCT). Le modèle des croyances transférables traite l’information sur deux niveaux :

- le niveau crédal (du latin *credo*, “je crois”) permet de représenter, manipuler et combiner plusieurs sources d’information à l’aide de fonctions de masse.
- le niveau pignistique (du latin *pignus*, “je parie”) où la décision est prise après avoir transformé les fonctions de masse, s’exprimant sur des ensembles non-disjoints, en probabilité pignistique afin de ramener l’information sur des ensembles disjoints.

### 3.2.2.3.a Cas discret

**Notions de base** La théorie des fonctions de croyance est un outil mathématique permettant de modéliser l’information provenant d’un capteur en affectant une croyance sur un événement. Un capteur est capable de fournir une opinion sur plusieurs événements réalisables. L’ensemble de ces événements réalisables est appelé cadre de discernement.

**Définition 3.2.3 (Cadre de discernement [197]).** Le cadre de discernement est un ensemble fini d’éléments disjoints noté  $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_i, \dots, \mathcal{C}_N\}$ . La théorie des fonctions de croyance permet de prendre en compte toutes les disjonctions possibles de  $\mathcal{C}$ , qui n’est rien d’autre que l’ensemble des parties de  $\mathcal{C}$  noté  $2^{\mathcal{C}}$ .

**Définition 3.2.4 (Fonctions de masse [197]).** Une fonction de masse est une fonction définie sur  $2^{\mathcal{C}}$  à valeurs dans  $[0, 1]$  vérifiant la propriété de normalisation :

$$\sum_{A \in 2^{\mathcal{C}}} m^{\mathcal{C}}(A) = 1 \quad (3.8)$$

On définit parfois l’hypothèse de monde fermé avec  $m^{\mathcal{C}}(\emptyset) = 0$ . Au contraire, on peut supposer que  $\mathcal{C}$  n’est pas exhaustif. L’hypothèse de monde ouvert est alors proposée et vérifie  $m^{\mathcal{C}}(\emptyset) > 0$ .

**Définition 3.2.5 (Élément focal).** Lorsqu'un élément  $A$  de  $2^{\mathcal{C}}$  vérifie  $m^{\mathcal{C}}(A) > 0$ , on dit que c'est un élément focal. L'ensemble des éléments focaux est appelé le noyau.

**Définition 3.2.6 (Singleton).** On appelle singleton un élément focal  $A \in \mathcal{C}$  tel que la cardinalité de  $A$  vaut 1 (notée  $|A| = 1$ ).

**Définition 3.2.7 (Fonction de masse consonante).** Une fonction de masse est dite consonante si ses éléments focaux sont emboîtés.

*Remarque 3.2.1.* La théorie des fonctions de croyance est assimilée à une théorie permettant de représenter les notions d'incertitude et d'imprécision. Par exemple, l'ignorance totale consistera à avoir  $m^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = 1$ , tandis qu'une connaissance précise et certaine correspondra à attribuer une masse totale sur un singleton  $A$  tel que  $m^{\mathcal{C}}(A) = 1$ . Une connaissance imprécise et certaine se traduit par le fait d'attribuer la masse totale à un élément focal qui n'est pas un singleton tandis que la connaissance incertaine se manifeste par la masse partagée sur plusieurs éléments focaux, singletons ou non singletons.

À partir d'une fonction de masse, il est possible de définir d'autres fonctions de croyance. La fonction de crédibilité de  $A$  notée  $bel^{\mathcal{C}}(A)$  correspond à l'ensemble des croyances qui croit partiellement en  $A$ . Elle traduit une probabilité basse. La fonction de plausibilité de  $A$  notée  $pl^{\mathcal{C}}(A)$  représente la croyance maximale que nous pouvons avoir en  $A$ . Elle traduit une probabilité haute. La fonction de communalité de  $A$  notée  $q^{\mathcal{C}}(A)$  a été introduite par Dempster [50], et nommée ainsi par Shafer [197]. Elle représente la somme des masses attribuées aux sous-ensembles de  $A$ . Elle est utilisée pour la programmation de la combinaison conjonctive.

**Définition 3.2.8 (Fonctions de croyance).** Une fonction de masse  $m^{\mathcal{C}}$  permet de construire les fonctions de croyance suivantes :

- fonction de crédibilité [197] :

$$bel^{\mathcal{C}}(A) = \sum_{B \subseteq A, B \neq \emptyset} m^{\mathcal{C}}(B) \quad \forall A \in 2^{\mathcal{C}} \quad (3.9)$$

- fonction de plausibilité [197] :

$$pl^{\mathcal{C}}(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m^{\mathcal{C}}(B) \quad \forall A \in 2^{\mathcal{C}} \quad (3.10)$$

- fonction de communalité [197] :

$$q^{\mathcal{C}}(A) = \sum_{B \in 2^{\mathcal{C}}, B \supseteq A} m^{\mathcal{C}}(B) \quad \forall A \in 2^{\mathcal{C}} \quad (3.11)$$

- fonction d'implicabilité :

$$b^{\mathcal{C}}(A) = \sum_{B \subseteq \mathcal{C}} m^{\mathcal{C}}(B) = bel^{\mathcal{C}}(A) + m^{\mathcal{C}}(\emptyset) \quad (3.12)$$

Lors de l'étape de décision, il est nécessaire de transformer une fonction de masse en mesure de probabilité. L'opération consistant à transformer une fonction de masse en probabilité pignistique est appelée la transformation pignistique.

**Définition 3.2.9 (Transformation pignistique [203]).** La transformation pignistique se définit par :

$$betP(\mathcal{C}_i) = \sum_{A \in 2^{\mathcal{C}}, \mathcal{C}_i \in A} \frac{m^{\mathcal{C}}(A)}{|A|(1 - m^{\mathcal{C}}(\emptyset))} \quad (3.13)$$

où  $|A|$  représente la cardinalité de  $A$ .

La transformation pignistique répartit uniformément la masse des éléments focaux sur les singletons qui les composent.

Lors de l'étape de décision, il existe plusieurs critères tels que le maximum de plausibilité et le maximum de crédibilité. Nous utilisons le maximum de probabilité pignistique [203] qui est un compromis entre le maximum de plausibilité et le maximum de crédibilité.

**Propriété 3.2.1 (Principe de moindre engagement [201]).** Il est possible à partir de la probabilité pignistique de déterminer une fonction de masse. En pratique, le problème s'avère délicat puisqu'à une même probabilité pignistique peut correspondre à plusieurs fonctions de masse : elles sont alors dites isopignistiques et appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{Biso}(BetP)$ . La démarche à suivre est de rechercher la fonction de masse la moins informative pour ne pas introduire de l'information dont nous ne disposons pas : il s'agit du principe de moindre engagement (*least commitment principle* en anglais). Le principe de moindre engagement ordonne les fonctions de croyance à partir de critères. En général, les relations d'ordre utilisées sont celles définies par la plausibilité et la communalité :

$$(\forall A \subseteq \mathcal{C}, pl_1^{\mathcal{C}}(A) \leq pl_2^{\mathcal{C}}(A)) \Leftrightarrow (m_1^{\mathcal{C}} \subseteq_{pl} m_2^{\mathcal{C}}) \quad (3.14)$$

$$(\forall A \subseteq \mathcal{C}, q_1^{\mathcal{C}}(A) \leq q_2^{\mathcal{C}}(A)) \Leftrightarrow (m_1^{\mathcal{C}} \subseteq_q m_2^{\mathcal{C}}) \quad (3.15)$$

Smets [202] prouve notamment que la fonction de masse la moins informative au sens de la communalité est la fonction de masse consonante.

En général, nous disposons de plusieurs sources d'informations définies sur le même cadre de discernement. Par conséquent, nous présentons dans la partie suivante la façon de combiner plusieurs fonctions de masse entre elles.

**Étape de combinaison** Dans cette partie, nous exposons deux opérateurs utilisés par la suite afin de combiner plusieurs fonctions de masse, suivant le problème rencontré. L'étape de combinaison permet alors d'obtenir qu'une seule fonction de masse. La combinaison conjonctive prend différentes formes suivant l'hypothèse que l'on fait. Historiquement, elle apparaît sous sa forme normalisée dans [50] permettant de travailler en monde fermé tandis que la forme non normalisée permet de travailler en monde ouvert. La combinaison conjonctive non normalisée a été introduite par Smets [200].

**Définition 3.2.10 (Combinaison conjonctive non-normalisée [200]).** Soient  $M$  fonctions de masse  $m_i^{\mathcal{C}}$ . Le résultat de la combinaison conjonctive non normalisée (opérateur noté  $\oplus$ ) est définie pour  $\forall A \in 2^{\mathcal{C}}$  par :

$$m^{\mathcal{C}}(A) = \sum_{B_1 \cap \dots \cap B_n = A \neq \emptyset} \prod_{i=1}^M m_i^{\mathcal{C}}(B_i) \quad (3.16)$$

Le calcul de la fonction de masse peut être lourd lorsque le cadre de discernement est grand. La fonction de communalité permet d'alléger les calculs. En effet, il suffit de convertir chaque



masse en sa fonction de communalité puis de calculer la fonction de communalité résultante définie par :

$$q^C(A) = \prod_{i=1}^M q_i^C(A) \quad (3.17)$$

Enfin, il suffit d'exécuter l'opération inverse pour la fonction de masse résultante. L'avantage de cette règle est qu'elle permet de conforter les hypothèses sur lesquelles les sources sont en accord et d'affaiblir celles où elles sont en désaccord. Le problème est qu'il est possible d'affecter une masse non nulle à l'ensemble vide : on travaille alors en monde ouvert. Lorsque les sources sont en désaccord, la valeur de masse non nulle attribuée à l'ensemble vide correspond à une mesure de conflit. Lorsque l'on combine une source avec elle même, la masse non nulle attribuée à l'ensemble vide est appelée auto-conflit [168].

La combinaison conjonctive normalisée est apparue dans [50] puis reprise dans [197]. Elle permet de combiner plusieurs fonctions de masse en une seule. En utilisant cette règle, on suppose l'hypothèse de monde fermé. Par conséquent, on force la masse de l'ensemble vide à 0.

**Définition 3.2.11 (Combinaison conjonctive normalisée [50,197]).** Soient  $M$  fonctions de masse  $m_i^C$ . La fonction de masse résultante de la combinaison conjonctive normalisée (opérateur noté  $\odot$ ) est définie pour  $\forall A \in 2^C$  par :

$$\begin{cases} m^C(A) = \frac{1}{1-\iota} \sum_{B_1 \cap \dots \cap B_n = A} \prod_{i=1}^M m_i^C(B_i) & \text{si } A \neq \emptyset \\ m^C(\emptyset) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.18)$$

avec  $\iota = \sum_{B_1 \cap \dots \cap B_n = \emptyset} \prod_{i=1}^M m_i^C(B_i)$  représentant une mesure de conflit entre les sources.

À noter que cette règle est commutative et associative. En pratique, pour utiliser la combinaison normalisée, on travaille d'abord dans le cas non normalisé et on divise après par la masse attribuée à l'ensemble vide. Nous illustrons ces propos par un exemple dans le tableau 3.2.

	$\emptyset$	$C_1$	$C_2$	$\Theta$
$m_1$	0	0,5	0	0,5
$m_2$	0	0,6	0,2	0,2
$m_1 \oplus m_2$	0,1	0,7	0,1	0,1
$m_1 \odot m_2$	0	0,78	0,11	0,11

TABLE 3.2 – Comparaison entre la combinaison conjonctive normalisée et non normalisée.

La combinaison conjonctive citée précédemment permet de prendre en compte les intersections d'événements. Cependant, il est possible de travailler à partir d'unions d'événements avec la combinaison disjonctive [60,201].

**Définition 3.2.12 (Combinaison disjonctive [201]).** Soient  $M$  fonctions de masse  $m_i^C$ . La fonction de masse résultante de la combinaison disjonctive est définie pour  $\forall A \in 2^C$  par :

$$m^C(A) = \sum_{B_1 \cup \dots \cup B_n = A} \prod_{i=1}^M m_i^C(B_i) \quad (3.19)$$

Il existe beaucoup d'autres combinaisons qui traitent différemment le conflit. Par exemple, Yager [233] répartit la masse de l'ensemble vide sur l'ignorance totale ; Dubois et Prade [62], avec la combinaison mixte, font un compromis entre la combinaison conjonctive et disjonctive.



**Opération sur les espaces produits** Il est possible de fournir une croyance sur plusieurs cadres de discernement en même temps. Par exemple, il est possible d'attribuer une croyance sur un type de sédiment  $\mathcal{C} = \{roche, vase, sable\}$  à partir d'information sur la texture d'images  $\Theta$  (en fait l'ensemble  $\Theta$  correspond à l'ensemble des nombres réels étendus  $\overline{\mathbb{R}}$  qui est utilisé dans le cas continu et est spécifié par la définition 3.2.18). Par conséquent, nous présentons les différentes opérations sur les espaces produits, notamment le théorème de Bayes généralisé.

**Définition 3.2.13 (Marginalisation).** L'opération de marginalisation (*marginalization* en anglais) d'une fonction de masse définie sur un espace produit  $\mathcal{C} \times \Theta$  sur  $\Theta$  consiste à transférer chaque masse  $m^{\mathcal{C} \times \Theta}$  vers sa projection sur  $\Theta$  :

$$m^{\mathcal{C} \times \Theta \downarrow \Theta}(A) = \sum_{\{B \subseteq \mathcal{C} \times \Theta \mid Proj(B \downarrow \Theta) = A\}} m^{\mathcal{C} \times \Theta}(B) \quad (3.20)$$

*Remarque 3.2.2.* Il existe plusieurs fonctions de masse  $m^{\mathcal{C} \times \Theta \downarrow \Theta}$  dont la marginalisation sur  $\Theta$  est  $m^\Theta$ . L'opération d'extension à vide permet de choisir la fonction de masse la moins informative.

**Définition 3.2.14 (Extension à vide).** L'opération d'extension à vide [197, 201] (*vacuous extension* en anglais) consiste à transférer chaque masse  $m^\Theta$  vers l'espace produit  $\mathcal{C} \times \Theta$  :

$$m^{\Theta \uparrow \mathcal{C} \times \Theta}(B) = \begin{cases} m^\Theta(A) & \text{si } B = \mathcal{C} \times \Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.21)$$

Supposons maintenant une fonction de masse  $m^{\mathcal{C} \times \Theta}$  définie sur un espace produit  $\mathcal{C} \times \Theta$ . Il est possible de calculer la fonction de masse  $m^\Theta$  sachant que l'hypothèse  $D \subseteq \Theta$ . Cette opération s'appelle le conditionnement.

**Définition 3.2.15 (Conditionnement).** La fonction de masse conditionnelle  $m^\Theta[D]$  est définie par :

$$m^\Theta[D] = (m^{\mathcal{C} \times \Theta} m_D^{\Theta \uparrow \mathcal{C} \times \Theta}) \downarrow \Theta \quad (3.22)$$

**Définition 3.2.16 (Déconditionnement).** L'opération inverse s'appelle le déconditionnement en choisissant la fonction de masse la moins informative :

$$m^\Theta[D] \uparrow^{\mathcal{C} \times \Theta} ((A \times D) \cup (\mathcal{C} \times \overline{D})) = m^\Theta[D](A) \quad (3.23)$$

Toutes ces définitions vont permettre d'introduire la notion d'affaiblissement.

**Définition 3.2.17 (Affaiblissement).** L'opération d'affaiblissement (*discounting* en anglais) a été introduite par Shafer [197] puis justifier formellement par Smets [201]. L'objectif va être d'affaiblir une fonction de masse à partir de la fiabilité (*reliability* en anglais) des sources. Supposons deux cadres de discernement :

- $\mathcal{R} = \{R, NR\}$  caractérisant la fiabilité de la source avec  $R$  : Fiable,  $NR$  : Non Fiable.
- $\Omega$  étant le cadre de discernement sur lequel s'exprime la source  $\mathcal{S}$ .

La fonction de masse  $m_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}$  s'exprimant sur  $\mathcal{R}$  est définie par :

$$\begin{cases} m_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}(R) &= 1 - \vartheta \\ m_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}(NR) &= \vartheta \end{cases} \quad (3.24)$$

Il est possible d'obtenir la fonction affaiblie  $\vartheta m^\Theta$  à partir de :

$$\vartheta m^\Theta = m_{\mathcal{S}}^\Theta[m_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}}, m^\Theta] = (m^\Theta[D] \uparrow^{\mathcal{C} \times \Theta} m_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S} \uparrow \Theta \times \mathcal{R}}) \downarrow \Theta \quad (3.25)$$

L'équation peut être simplifiée par :

$$\begin{aligned} \vartheta m^\Theta(A) &= (1 - \vartheta)m(A) \text{ si } A \subset \Theta \\ \vartheta m^\Theta(A) &= (1 - \vartheta)m(A) + \vartheta \text{ si } \Theta = A \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Théorème 3.2.1 (Théorème de Bayes généralisé [201]).** Considérons deux cadres de discernement  $\mathcal{C}$  et  $\Theta$ .  $\forall \mathcal{C}_i \in \mathcal{C}$ , nous connaissons chaque masse conditionnelle  $m^\Theta[\mathcal{C}_i]$ . Lorsque la condition  $X \subseteq \Theta$  est vérifiée, la fonction de masse conditionnellement à  $X$  est obtenue par la relation :

$$m[X](A) = \prod_{\mathcal{C}_i \in A} pl^\Theta[\mathcal{C}_i](X) \prod_{\mathcal{C}_i \in \bar{A}} (1 - pl^\Theta[\mathcal{C}_i](X)) \quad (3.27)$$

Cette partie a permis de développer le formalisme des fonctions de croyance dans le cas d'un cadre de discernement discret. Cependant, ce formalisme n'est plus valide lorsque le cadre de discernement est continu, comme par exemple les données fournies par un capteur. Par conséquent, l'objectif de la partie présentée ci-dessous est d'exposer la théorie des fonctions de croyance continues.

### 3.2.2.3.b Cas continu

**Généralités** Les fonctions de croyance ont d'abord été étudiées dans un cadre de discernement dénombrable. Cependant, ce modèle n'est plus valide lorsque l'information fournie par les capteurs est à variable continue. Strat [209] puis Smets [202] propose d'étendre cette théorie au cas continu. Dans cette section, les fonctions de masse deviennent des densités de masse, les fonctions de crédibilité, plausibilité et communalité deviennent des intégrales de ces densités et la probabilité pignistique devient une densité pignistique. L'objectif de cette partie est de présenter les différentes définitions des fonctions de croyance continues, notamment la construction d'une densité de masse à partir d'une densité de probabilité. Le but va être alors d'attribuer une masse à des intervalles.

#### Modélisation des densités de masse

**Définition 3.2.18 (Ensemble des nombres réels étendus [202]).** L'ensemble  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$  est appelé l'ensemble des nombres réels étendus.

Pour pouvoir attribuer une masse sur un intervalle  $\mathcal{I} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ , Smets [202] introduit les ensembles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{T}$ .

**Définition 3.2.19.** Supposons  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . L'ensemble  $\mathcal{I}$  [202] est défini par :

$$\mathcal{I}_{[a;b]} = \{[a; b], ]a; b], [a; b[, ]a; b[(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \quad (3.28)$$

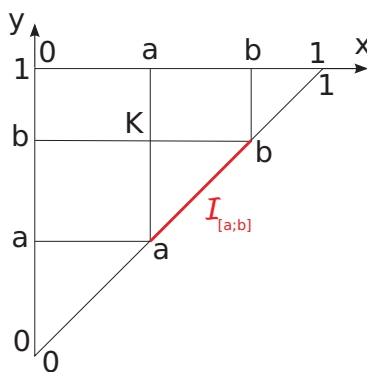
$\mathcal{I}$  correspond à l'ensemble des intervalles fermés, ouverts et semi-fermés de  $\bar{\mathbb{R}}$ .

**Définition 3.2.20.** Supposons  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . L'ensemble  $\mathcal{T}$  [202] est défini par :

$$\mathcal{T}_{[a;b]} = \{(a; b) | (a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \leq b\} \quad (3.29)$$

Un intervalle fermé de  $\mathcal{I}$  peut être vu comme un point dans un espace étendu à deux dimensions. La figure 3.5, tirée de [202], illustre ces propos dans le cas où  $\bar{\mathbb{R}}$  se limite à  $[0; 1]$ . Le point  $K = (a; b)$  à l'intérieur du triangle  $\mathcal{T}_{[0;1]}$  définit l'intervalle  $[a; b] \subseteq [0; 1]$ .

Il est possible de discrétiser l'ensemble  $\mathcal{I}_{[0;1]}$  en un ensemble fini d'intervalles  $\mathcal{A} = (A_i | A_i \in \mathcal{I}_{[0;1]})$ . On peut alors construire une fonction de masse (on parle de *basic belief assignment* en anglais)  $m^{\mathcal{A}}$  sur  $\mathcal{A}$ . À partir de cette définition de la fonction de masse, il est alors possible de définir les fonctions de croyance  $bel^{\mathcal{A}}$ ,  $q^{\mathcal{A}}$  et  $pl^{\mathcal{A}}$ . Pour clarifier, nous utilisons un exemple concret donné par Smets [202] en Table 3.3.


 FIGURE 3.5 – Représentation graphique de  $\mathcal{T}$ .

$i$	$m^{\mathcal{A}}$	$A_i = [a_i; b_i]$		$A = [0, 2; 0, 7]$		
		$a_i$	$b_i$	$bel^{\mathcal{A}}(A)$	$q^{\mathcal{A}}(A)$	$pl^{\mathcal{A}}(A)$
1	0,07	0,3	0,4	0,07	0	0,07
2	0,18	0,1	0,9	0	0,18	0,18
3	0,25	0,1	0,8	0	0,25	0,25
4	0,15	0,4	0,9	0	0	0,15
5	0,05	0,4	0,5	0,05	0	0,05
6	0,30	0,8	0,9	0	0	0
somme	1			0,12	0,43	0,70

 TABLE 3.3 – Exemple de bba définie sur  $[0;1]$  avec un nombre fini d'éléments focaux.

Pour calculer la fonction de crédibilité attribuée à  $A$ , on recherche tous les  $A_i \subseteq A$  puis on ajoute les masses. Il est possible de généraliser cette approche dans  $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ . On peut alors définir une densité de probabilité  $f^{\mathcal{T}}$  qui à tout intervalle  $\mathcal{I}$  fait correspondre une valeur dans  $[0; +\infty]$ . À cette densité de probabilité, il est possible de définir une densité de masse, notée  $m^{\overline{\mathbb{R}}}$  (*Basic Belief Density* en anglais) qui permet d'attribuer une masse sur un intervalle  $[a; b]$  :

$$m^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b]) = \begin{cases} f^{\mathcal{T}}(a; b) & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si } a > b \end{cases} \quad (3.30)$$

Les éléments focaux sont des intervalles fermés de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Toutes les notions vues dans le cadre discret en section 3.2.2.3.a peuvent être transposées au domaine continu par cette définition.

**Définition 3.2.21.** À partir des densités de masse, il est possible de définir,  $\forall a \leq b$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , les fonctions de croyance suivantes :

– fonction de crédibilité :

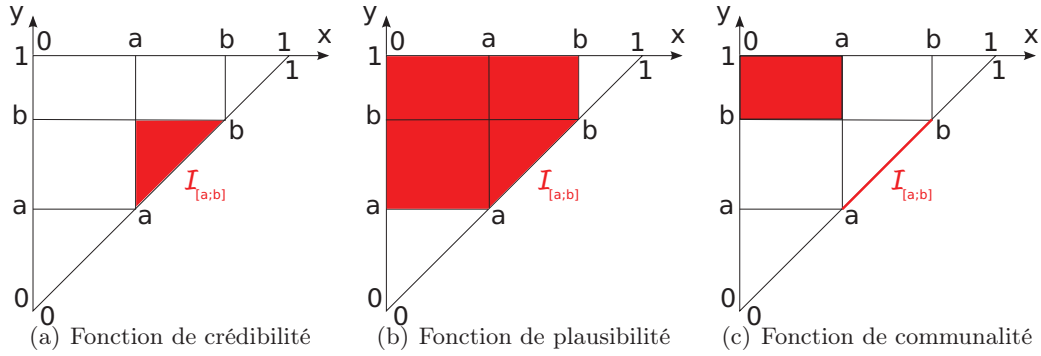
$$bel^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b]) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=x}^{y=b} f(x, y) dy dx \quad (3.31)$$

– fonction de plausibilité :

$$pl^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b]) = \int_{x=-\infty}^{x=b} \int_{y=\max(a, x)}^{y=+\infty} f(x, y) dy dx \quad (3.32)$$

– fonction de communalité :

$$q^{\overline{\mathbb{R}}}([a; b]) = \int_{x=-\infty}^{x=a} \int_{y=b}^{y=+\infty} f(x, y) dy dx \quad (3.33)$$


 FIGURE 3.6 – Illustration dans  $\mathcal{T}$  des fonctions de crédibilité, plausibilité et communalité.

Les fonctions de crédibilité, plausibilité et communalité sont représentées graphiquement dans  $\mathcal{T}$  par la Figure 3.6 dans le cas où  $\mathbb{R}$  est limité à  $[0; 1]$ .

**Définition 3.2.22 (Densité pignistique [202]).** La probabilité pignistique  $BetP$  devient une densité pignistique  $Betf$  et est calculée de la manière suivante pour  $a < b$  :

$$Betf([a; b]) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=x}^{y=+\infty} \frac{|[a; b] \cap [x; y]|}{|[x; y]|} f^{\mathcal{T}}(x, y) dx dy \quad (3.34)$$

avec  $|[x; y]| = y - x$  et  $|[a; b] \cap [x; y]| = \min(y; b) - \max(x; a)$ .

**Construction d'une fonction de masse consonante à partir d'une densité de probabilité unimodale** La seule information que nous avons à notre disposition est la fonction de densité pignistique  $Betf[C_i]$  conditionnellement à la classe  $C_i \in \Theta$ . Dans les travaux de Smets [202], cette fonction de densité est supposée unimodale de mode  $\nu$ , continue et strictement monotone croissante (décroissante) à gauche (à droite) du mode (qu'il nomme *bell-shaped*). Cette propriété est vérifiée pour toutes les distributions  $\alpha$ -stables (et donc pour le cas Gaussien) [234]. Il est possible d'associer à cette densité de probabilité pignistique  $Betf$  plusieurs densités de masse. L'ensemble de ces fonctions de masse vérifiant cette propriété est appelée ensemble isopignistique  $\mathbf{Biso}(Betf)$ . Smets [202] prouve que la densité de masse  $m^{\mathbb{R}}$  attribuée à un intervalle  $\mathcal{I} = [a; b]$  avec  $b > \nu$  est déterminée par :

$$m^{\mathbb{R}}([a; b]) = \theta(b) \delta(a - \nu(b)) \quad (3.35)$$

avec  $\nu(b)$  satisfaisant la condition  $Betf(\nu(b)) = Betf(b)$  et  $\theta(b)$  :

$$\theta(b) = (\nu(b) - b) \frac{dBetf(b)}{db} \quad (3.36)$$

La fonction de masse ainsi construite est consonante et appartient à l'ensemble  $\mathbf{Biso}(Betf)$ .

**Cas Gaussien** Dans [35], Caron *et al.* construisent une fonction de masse associée à une densité de probabilité Gaussienne de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . L'ensemble des éléments focaux  $I_{\alpha_{cut}}$  est défini par :

$$I_{\alpha_{cut}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{(x - \delta)^2}{\sigma^2} = \alpha_{cut}\} = [\delta - \sigma\sqrt{\alpha_{cut}}; \delta + \sigma\sqrt{\alpha_{cut}}] \quad (3.37)$$

La masse attribuée à l'ensemble  $I_{\alpha_{cut}}$  est définie comme étant une fonction de densité de probabilité du  $\chi^2$  avec 3 degrés de liberté :

$$m^{\mathbb{R}}(I_{\alpha_{cut}}) = \frac{\sqrt{\alpha_{cut}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_{cut}\right), \text{ avec } \alpha_{cut} \geq 0 \quad (3.38)$$

Caron *et al.* calculent les fonctions de croyance avec à leur disposition une densité pignistique Gaussienne de mode  $\delta$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ . Les fonctions de masse sont construites de telles sortes que les isosurfaces (surfaces ayant la même probabilité)  $S_i$ , avec  $1 \geq i \geq n$  sont les éléments focaux. Par exemple dans le cas d'une Gaussienne dans  $\mathbb{R}^2$ , les isosurfaces sont des ellipses (exemple Figure 3.7). Les auteurs généralisent les fonctions de croyance dans  $\mathbb{R}^d$ . Les

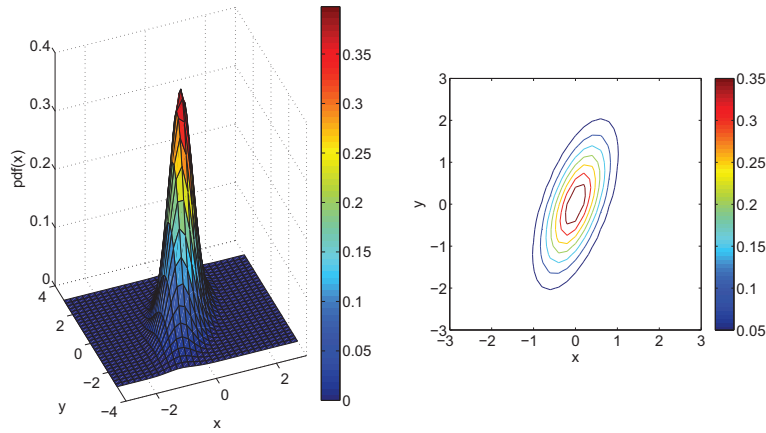


FIGURE 3.7 – Densité de probabilité et isosurfaces pour une Gaussienne de moyenne  $\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\Sigma = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ .

éléments focaux sont définis comme l'ensemble des intervalles emboîtés  $HV_{\alpha_{cut}}$  délimités par les hypersurfaces de même probabilité  $HC_{\alpha_{cut}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | (\mathbf{x} - \delta)^t \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \delta)\}$ . Le principe de moindre engagement permet d'obtenir la densité de masse :

$$m(HV_{\alpha_{cut}}) = \frac{\alpha^{\frac{d+2}{2}-1}}{2^{\frac{d+2}{2}} \Gamma(\frac{d+2}{2})} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_{cut}\right) \text{ avec } \alpha_{cut} \geq 0 \quad (3.39)$$

L'équation (3.39) définit une loi du  $\chi^2$  avec  $d + 2$  degrés de liberté. La fonction de plausibilité au point  $\mathbf{x}$  appartenant à l'hypersurface  $S_i$  correspond à un hypervolume délimité par  $S_i$ .

**Calcul de la fonction de plausibilité** Lorsqu'on dispose de sources d'information s'exprimant sur plusieurs hypothèses possibles, il est possible de construire une fonction de masse à partir du théorème de Bayes généralisé. Cette opération nécessite de travailler à partir des fonctions de plausibilité. Dans le cas d'une densité de probabilité unimodale, Smets [202] définit la fonction de plausibilité, pour  $x \geq \nu$ , par :

$$pl[C_i](I_{\alpha_{cut}}) = \int_a^{+\infty} (v(t) - t) \frac{dBetf(t)}{dt} dt \quad (3.40)$$

Lorsque la densité pignistique  $Betf$  est symétrique, l'équation (3.40) se simplifie par intégration par parties :

$$pl[\mathcal{C}_i](I_{\alpha_{cut}}) = 2(a - \nu)Betf(a) + 2 \int_a^{+\infty} Betf(t)dt \quad (3.41)$$

**Cas  $\alpha$ -stable symétrique** Nous développons le calcul de la fonction de plausibilité dans le cas d'une densité de probabilité  $\alpha$ -stable unimodale [83], *i.e.*  $\beta = 0$  et  $\nu = \delta$ . Le théorème de Chasles nous permet de calculer  $\int_a^{+\infty} Betf(t)dt$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(t)dt = \int_{-\infty}^a f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(t)dt + \int_a^{+\infty} f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(t)dt \quad (3.42)$$

Par définition d'une densité de probabilité,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(t)dt = 1$  et  $\int_{-\infty}^a f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(t)dt = F_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(a)$  avec  $F_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}$  représentant la fonction de répartition d'une loi  $\alpha$ -stable. L'équation (3.41) se simplifie :

$$pl[\mathcal{C}_i](I_{\alpha_{cut}}) = 2(a - \delta)f_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(a) + 2(1 - F_{S_\alpha(0,\gamma,\delta)}(a)) \quad (3.43)$$

*Remarque 3.2.3.* Dans le cas particulier d'une densité de probabilité Gaussienne, Caron *et al.* proposent une autre expression pour la fonction de plausibilité. La fonction de plausibilité ainsi obtenue vaut :

$$pl^{\mathbb{R}}(I_{\alpha_{cut}}) = \int_{\alpha_{cut} = \frac{(x-\delta)^2}{\sigma^2}}^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} dt \exp\left(-\frac{1}{2}t\right), \text{ avec } \alpha_{cut} \leq 0 \quad (3.44)$$

L'équation (3.44) se simplifie par :

$$pl^{\mathbb{R}}(a \in \mathbb{R}) = 1 - F_3\left(\frac{(a - \delta)^2}{\sigma^2}\right) \quad (3.45)$$

avec  $F_3$  la fonction de répartition d'une loi du  $\chi^2$  avec 3 degrés de liberté. Cette expression est similaire à ce que nous obtenons.

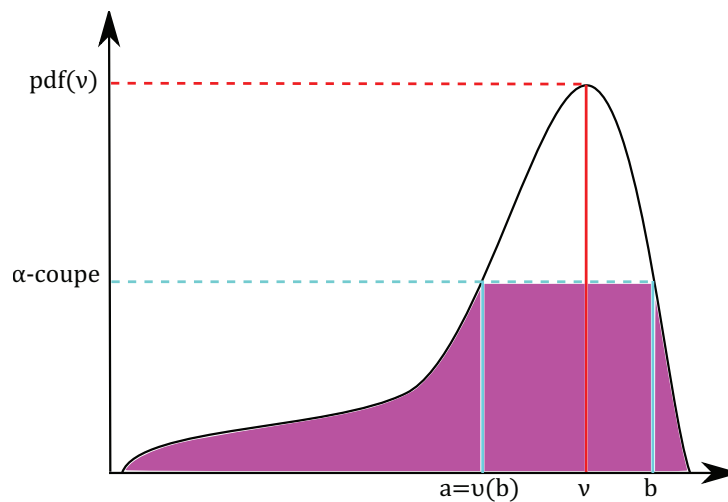


FIGURE 3.8 – Représentation graphique de la fonction de plausibilité  $pl([a; b])$

Lorsque l'expression de la fonction de densité de probabilité n'a pas de forme analytique, il est difficile de trouver la fonction  $v$  telle que  $Betf(v(b)) = Betf(b)$ . Cependant, il est possible de

travailler de manière numérique. La fonction de plausibilité attribuée à un intervalle  $I_{\alpha_{cut}} = [a; b]$  peut être interprétée comme l'aire définie sous l' $\alpha$ -coupe tel que  $\alpha_{cut} = Betf(a)$  (Figure 3.8).

$$pl[\mathcal{C}_i](I_{\alpha_{cut}}) = \int_{-\infty}^a Betf(t)dt + (b - a)BETF(a) + \int_b^{+\infty} Betf(t)dt \quad (3.46)$$

Par définition d'une densité de probabilité,  $\int_{-\infty}^a f_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(t)dt = F_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(a)$  et  $\int_b^{+\infty} f_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(t)dt = 1 - F_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(b)$ . En général, nous ne disposons que d'un seul point  $b$ . Il faut donc procéder numériquement pour obtenir l'autre point  $a$  tel que  $f_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(b) = f_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(a)$ . La fonction de plausibilité attribuée à l'intervalle  $I_{\alpha_{cut}}$  est définie par :

$$pl[\mathcal{C}_i](I_{\alpha_{cut}}) = 1 + F_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(a) - F_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(b) + (b - a)f_{S_{\alpha}(\beta, \gamma, \delta)}(a) \quad (3.47)$$

Par la suite, supposons que nous cherchons à attribuer une étiquette à un vecteur  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ . L'équation (3.47) va permettre de calculer la fonction de plausibilité au point  $x_1$  associée à une densité pignistique  $\alpha$ -stable. Pour un même attribut (par exemple le paramètre d'Haralick "homogénéité"), nous disposons de plusieurs densités pignistiques associées à un type de sédiment (roche, vase et sable). Le théorème de Bayes généralisé va ensuite permettre de déterminer la fonction de masse associée à l'attribut en question. La même démarche est effectuée sur différents attributs (comme par exemple, le paramètre d'Haralick "contraste") au point  $x_2$ . Les fonctions de masse sont combinées puis transformées en probabilité pignistique en vue de l'étape de décision.

**Validation de l'approche** Pour valider le calcul de la fonction de plausibilité dans le cas d'une densité de probabilité Gaussienne avec l'équation 3.45, nous reprenons l'exemple de Ristic *et al.* [185, 186] pour classier des données cinématiques d'avions défini par le cadre de discernement  $\mathcal{C} = \{\text{avion commercial, Bombardier, Avion de chasse}\}$ . Le profil de vitesse de chaque avion correspond à une densité de probabilité gaussienne. L'objectif va donc être de déterminer la classe d'appartenance à partir d'une mesure de la vitesse. Nous calculons les fonctions de plausibilité à partir des équations 3.43 et 3.45. À partir du théorème de Bayes généralisé, on détermine la classe d'appartenance sachant la vitesse. Nous représentons la probabilité pignistique obtenue pour chaque approche (Figure 3.9). Nous remarquons que les deux approches s'avèrent identiques. Le problème avec l'approche de Smets est qu'il est difficile de représenter des éléments focaux correspondants à des intervalles disjoints. Doré [56] généralise le calcul de la fonction de plausibilité à partir d'une fonction de densité de probabilité quelconque. Il introduit la fonction de mesure crédale et fonction indice.

**Mesure crédale** Notre objectif va être de calculer la fonction de plausibilité pour n'importe quelle densité de probabilité  $\alpha$ -stable. Le problème est qu'il n'existe pas d'expression analytique pour la densité de probabilité d'une telle distribution. Doré [56] propose de calculer les fonctions de croyance pour n'importe quelle densité de probabilité à partir d'une fonction indice  $f^I$ . Cette fonction indice va permettre de parcourir tous les éléments focaux  $\mathcal{F}$  associés à une fonction de croyance à partir d'un espace indice  $I$  et est définie par :

$$f^I: \begin{cases} I \longrightarrow \mathcal{F} \\ y \longmapsto f^I(y) \end{cases} \quad (3.48)$$

Il est possible alors de faire correspondre un élément  $y$  de  $I$  à un élément focal  $f^I(y)$ . Il exhibe une mesure crédale  $\mu^\Omega$  telle que  $\int_I d\mu^\Omega(y) \leq 1$ . Une fonction de croyance sur  $\Omega$  est alors

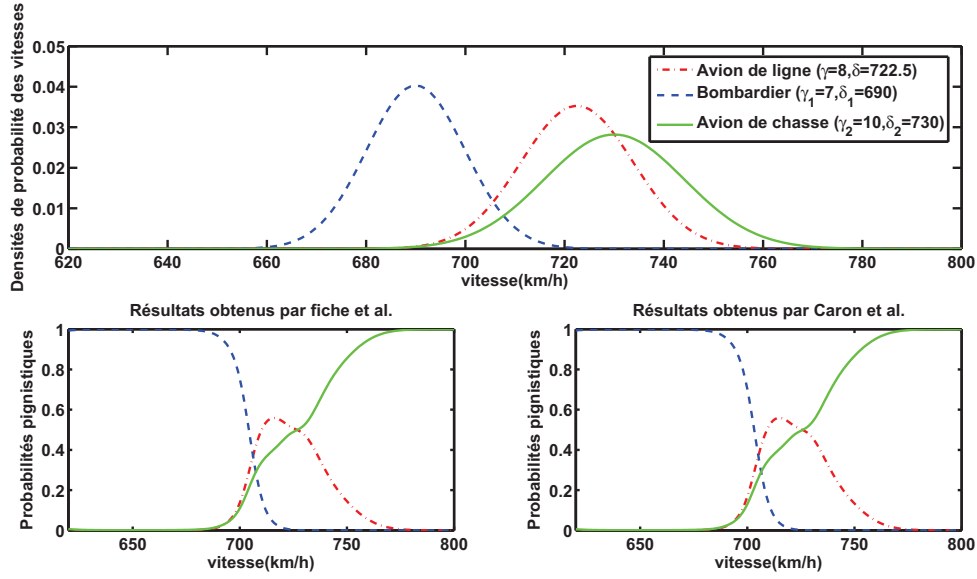


FIGURE 3.9 – Validation de notre approche à partir de celle de Caron *et al.* dans le cas d'une classification de données cinématiques modélisées par des densités de probabilité Gaussienne

déterminée par le couple  $(f^I, \mu^\Omega)$  correspondant à une mesure de probabilité. Il est nécessaire de définir les ensembles suivants afin de calculer les fonctions de croyance [56] :

$$F_{\subseteq A} = \{y \in I | f^I(y) \subseteq A\} \quad (3.49)$$

$$F_{\cap A} = \{y \in I | f^I(y) \cap A \neq \emptyset\} \quad (3.50)$$

$$F_{\supseteq A} = \{y \in I | f^I(y) \supseteq A\} \quad (3.51)$$

Ces ensembles permettent alors de définir [56] :

$$bel^\Omega(A) = \int_{F_{\subseteq A}} d\mu^\Omega(y) \quad (3.52)$$

$$pl^\Omega(A) = \int_{F_{\cap A}} d\mu^\Omega(y) \quad (3.53)$$

$$q^\Omega(A) = \int_{F_{\supseteq A}} d\mu^\Omega(y) \quad (3.54)$$

Par la suite, la fonction de croyance consonante permet de construire une relation d'ordre sur  $\mathcal{F}$  à partir de l'opérateur  $\subseteq$ . Il est alors possible de définir une fonction indice  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathcal{F}$  telle que :

$$y \geq x \implies f(y) \subseteq f(x) \quad (3.55)$$

Les éléments focaux sont construits à partir d'une fonction continue  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^+$ . L'ensemble des éléments focaux correspondent ainsi aux  $\alpha$ -coupes de  $g$  :

$$f_{cs}^I = \{x \in \mathbb{R}^d | g(x) \geq \alpha_{cut}\} \quad (3.56)$$

Cette définition permet alors de définir la fonction indice :

$$f_{cs}^I : I = [0, \max(\alpha_{cut})] \rightarrow \{f_{cs}^I(\alpha_{cut}) | \alpha_{cut} \in I\} \quad (3.57)$$

$$\alpha_{cut} \mapsto f_{cs}^I(\alpha_{cut}) \quad (3.58)$$



L'information que nous avons à notre disposition est une densité de probabilité continue  $Betf$ . Plusieurs fonctions de masse peuvent être associées à cette densité de probabilité. Le principe de moindre engagement va permettre de choisir la fonction de masse la moins informative, dont les éléments focaux sont les  $\alpha$ -coupes de  $Betf$  tels que :

$$d\mu^\Omega(y)(\alpha_{cut}) = \lambda_L(f_{cs}^I(\alpha_{cut}))d\lambda_L(\alpha_{cut}) \quad (3.59)$$

**Comparaison du calcul de la fonction de plausibilité par la méthode de Caron [35] et celle de Doré [58] dans le cas d'un mélange de Gaussiennes** Le calcul d'un mélange de Gaussiennes par la méthode de Caron est évalué comme la somme pondérée des fonctions de plausibilité de chaque Gaussienne considérée indépendamment. La méthode de Doré utilise une mesure crédale permettant de calculer la fonction de plausibilité. Nous considérons le mélange de Gaussiennes suivant :  $\pi = [1/3; 3/4]$ ,  $\mu = [2; 6]$  et  $\sigma^2 = [1; 1]$ . On remarque que la méthode

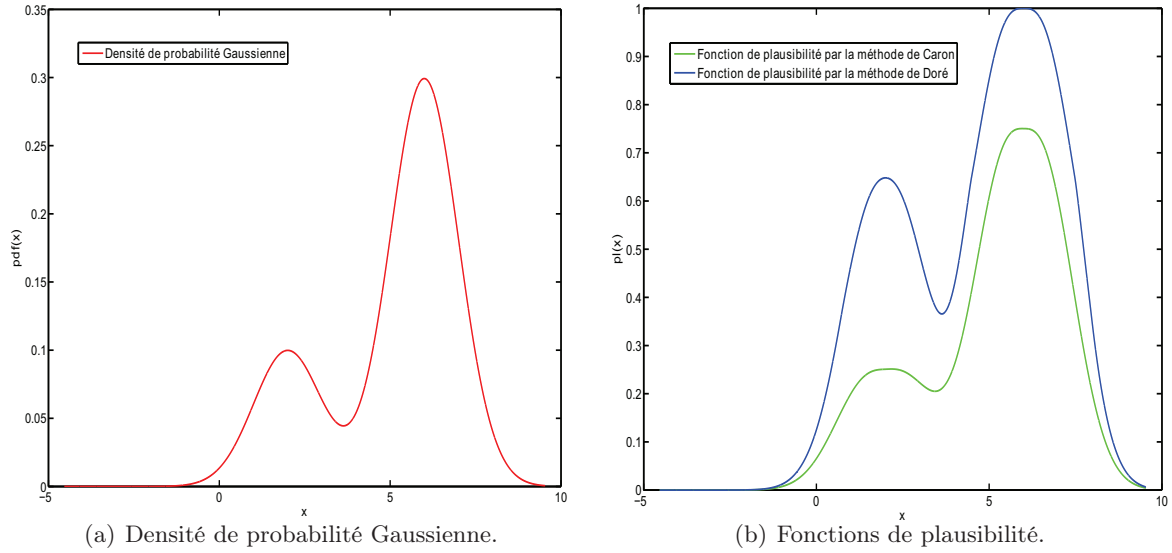


FIGURE 3.10 – Comparaison entre les fonctions de plausibilité obtenues par la méthode de Caron et Doré dans le cas d'un mélange de Gaussiennes.

de Caron sous-estime la fonction de plausibilité par rapport à celle proposée par Doré. Lorsque la densité de probabilité du mélange de Gaussiennes est maximale, la valeur de la fonction de plausibilité doit valoir 1, ce qui est le cas avec la méthode proposée par Doré.

Dans la suite de cette thèse, la démarche introduite par Doré n'est pas utilisée dans le cas d'une densité de probabilité  $\alpha$ -stable univariée car les attributs que nous considérons présente un seul mode. Par contre, cette approche est utilisée dans le cas d'une densité de probabilité  $\alpha$ -stable multivariée car la densité de probabilité  $\alpha$ -stable ne dispose pas d'expression analytique. Le calcul de la fonction de plausibilité associé à une densité de probabilité  $\alpha$ -stable multivariée s'effectue numériquement en discrétisant l'espace des attributs.

### 3.3 Classification suivant la théorie des fonctions de croyance

Dans cette section, nous proposons d'appliquer la théorie des fonctions de croyance dans le cadre de la modélisation et la classification de données générées de type Gaussien et  $\alpha$ -stable ainsi que des données réelles issues d'un sondeur monofaisceau. Nous comparons l'approche utilisant la théorie des fonctions de croyance continues avec une approche Bayésienne et la méthode des  $k$

plus proches voisins. L'influence du modèle d'estimation des attributs est évaluée à partir d'un test de Kolmogorov-Smirnov en considérant deux hypothèses :

- $H_1$  : les échantillons suivent le modèle Gaussien.
- $H_2$  : les échantillons suivent le modèle  $\alpha$ -stable.

Nous nous limitons à un vecteur de paramètres de dimension  $d \leq 2$ . En effet, la généralisation des densités de probabilités  $\alpha$ -stables en dimension  $d > 2$  augmente le temps CPU car il n'existe pas d'expression analytique des densités de probabilité. Les attributs, sur lesquels sont effectués la classification, sont considérés soit à :

- une dimension où chaque dimension est considérée comme une source d'information.
- deux dimensions où nous considérons un vecteur de deux dimensions.

### 3.3.1 Classification de données générées

Dans cette section, nous allons tout d'abord classifier des données générées de type Gaussiennes puis de type  $\alpha$ -stables.

#### 3.3.1.1 Cas Gaussien

Dans cet exemple, nous simulons trois classes artificielles générées à partir de distributions Gaussiennes et caractérisées par les vecteurs moyenne et matrices de covariance définis dans  $\mathbb{R}^2$  (table 3.4). La base d'apprentissage est composée de 1000 vecteurs et la base de test de 1747 vecteurs (en effet par soucis de représentation, on se limite aux données comprises dans le maillage  $[-4; 4] \times [-4; 4]$ ). Les vecteurs de la base test sont représentés dans la figure 3.12. Lorsque nous observons les vecteurs de la base de test, nous remarquons que les classes sont mélangées pour des abscisses de  $[-2; 2] \times [-1; 1]$ . Dans la suite de notre étude, nous comparons les performances de classification en utilisant des méthodes des  $k$  plus proches voisins (classique et crédibiliste) et des méthodes se fondant sur des modèles (Gaussien et  $\alpha$ -stable). Tout d'abord,

	$\mu$	$\Sigma$
Classe $C_1$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1,5 \\ 1,5 & 3 \end{pmatrix}$
Classe $C_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$
Classe $C_3$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

TABLE 3.4 – Moyennes et matrices de covariance des distributions Gaussiennes.

nous appliquons les méthodes de classification par la méthode des  $k$  plus proches voisins. Les vecteurs ont été classifiés et leurs classes d'appartenance peuvent être observées en figure 3.13. Nous remarquons que la classification est correcte. La confusion entre les classes se fait aux valeurs de bord des différentes distributions. On remarque qu'un nombre plus important de vecteurs sont classifiés de type  $C_2$  car les vecteurs de classe  $C_2$  ont tendance à se mélanger avec les deux autres classes, ce qui est confirmé par les matrices de confusion (Table 3.5). Le taux de classification de la méthode des  $k$  plus proches voisins classique est de 73,03 % contre 72,86 % pour la méthode des  $k$  plus proches voisins crédibiliste. Les deux méthodes peuvent être considérées comme similaires puisque l'écart entre les deux taux n'est pas significatif.

Ensuite, nous allons comparer ces résultats à partir d'une approche type modèle présentée en section 3.2.2.3.b. Dans un premier temps, nous supposons que chaque composante des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  peut être considérée comme un attribut. La base d'apprentissage permet d'estimer les

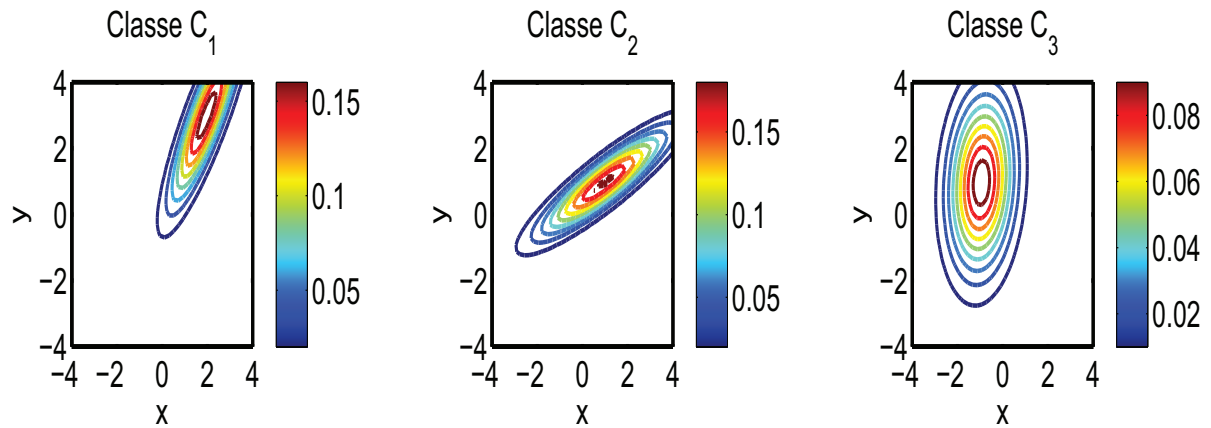


FIGURE 3.11 – Représentation de la densité de probabilité pour chaque classe.

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>19,63 %</b>	8,29 %	1,14 %
$C_2$	3,32 %	<b>25,52 %</b>	5,66 %
$C_3$	0,57 %	7,95 %	<b>27,87 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>19,63 %</b>	8,24 %	1,20 %
$C_2$	3,60 %	<b>25,18 %</b>	5,72 %
$C_3$	0,62 %	7,72 %	<b>28,04 %</b>

TABLE 3.5 – Matrice de confusion dans le cas de données générées par une Gaussienne (à gauche kppv et à droite kppv crédibiliste)

paramètres de chaque distribution univariée Gaussienne et  $\alpha$ -stable. Le test de Kolmogorov-Smirnov ne rejette aucune hypothèse (Table 3.7) ce qui permet d'affirmer que ces deux modèles sont valides. L'approche Bayésienne nécessite d'introduire les notions de probabilités *a priori* sur les classes que nous ne connaissons pas forcément : chaque probabilité *a priori* de chacune des 3 classes est égale à la proportion de vecteurs correspondante de cette classe contenus dans la base d'apprentissage. L'approche Bayésienne avec le modèle Gaussien (*cf.* Figure 3.14(a) et Table 3.6) et  $\alpha$ -stable (*cf.* Figure 3.14(b) et Table 3.6) n'est pas performante puisqu'elle offre un taux de classification de 52,66 % et 52,94 %, inférieure à celui obtenu avec les méthodes des  $k$  plus proches voisins. Une grande proportion de vecteurs appartenant aux classes  $C_1$  et  $C_3$  se retrouve en classe  $C_2$ . L'approche avec les fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien (*cf.* Figure 3.15(a) et Table 3.8) et les  $\alpha$ -stables (*cf.* Figure 3.15(b) et Table 3.8), permet d'améliorer significativement les résultats et d'obtenir des taux de 68,28 % et 67,83 %. La classe  $C_2$  n'est plus majoritaire.

Dans un second temps, nous travaillons avec un vecteur de deux dimensions. Comme pour le cas à une dimension, le test de Kolmogorov-Smirnov est vérifié pour les deux hypothèses (Table 3.9). L'approche Bayésienne avec le modèle Gaussien (*cf.* Figure 3.14(c) et Table 3.6) et  $\alpha$ -stable (*cf.* Figure 3.14(d) et Table 3.6) donne des résultats significativement proches de l'approche avec les fonctions de croyance continues à une dimension. L'approche avec les fonctions de croyance permet d'obtenir des résultats significativement meilleurs de l'ordre de 74,81 % pour le modèle Gaussien (*cf.* Figure 3.15(c) et Table 3.8) et 73,61 % pour le modèle  $\alpha$ -stable (*cf.* Figure 3.15(d) et Table 3.8) qui sont très légèrement supérieurs aux méthodes des  $k$  plus proches voisins. Nous remarquons que l'approche avec les fonctions de croyance à deux dimensions permet d'avoir des résultats de classification meilleurs que ceux obtenus avec les autres méthodes. Cependant, il existe une petite différence entre les résultats de classification avec le

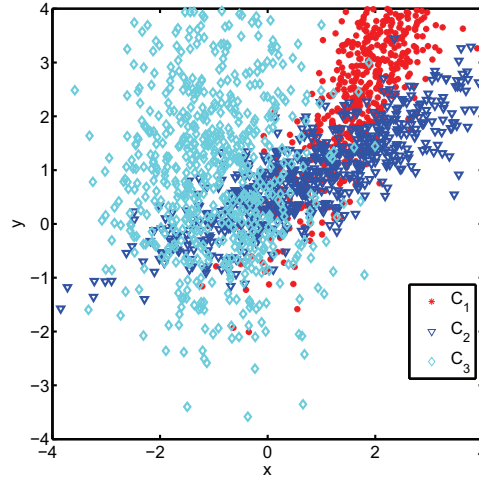
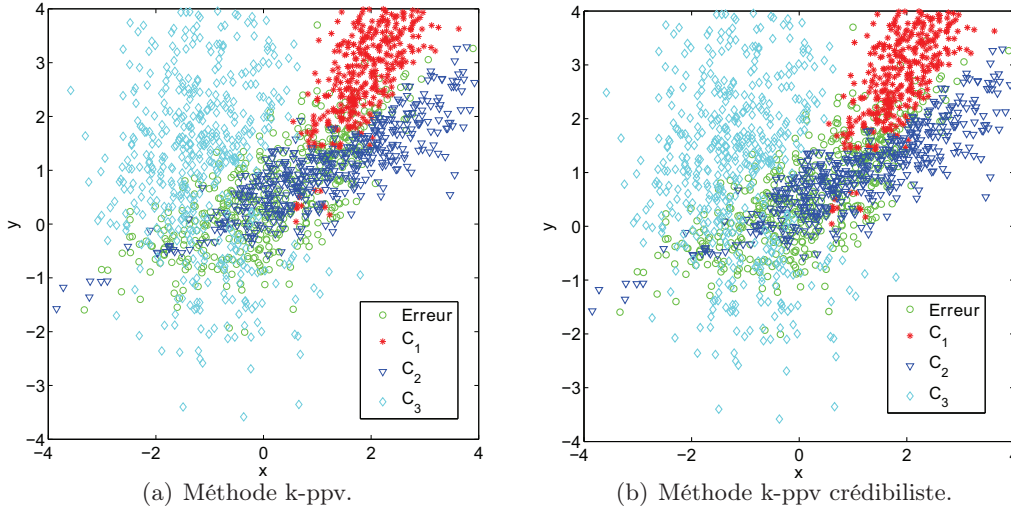


FIGURE 3.12 – Représentation de la base de test


FIGURE 3.13 – Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des  $k$  plus proches voisins.

modèle  $\alpha$ -stable et Gaussien. Ce phénomène s'explique dans le cas 2 dimensions par le fait que nous faisons un maillage de  $[-4; 4] \times [-4; 4]$  sur 20 points de discrétisation pour calculer la fonction de plausibilité pour le modèle  $\alpha$ -stable. Les méthodes Bayésiennes ont tendance à donner des résultats moins bons que ceux obtenus à partir des méthodes par fonctions de croyance continues. L'un des problèmes majeur est de savoir quel *a priori* nous avons sur les différentes classes, problème qui ne se pose pas avec les fonctions de croyance continues.

### 3.3.1.2 Cas $\alpha$ -stable

Dans cet exemple, nous simulons trois classes artificielles générées à partir de distributions  $\alpha$ -stables caractérisées par les données définies dans  $\mathbb{R}^2$  (Table 3.10). La base d'apprentissage est composée de 1000 vecteurs et la base de test de 1554 vecteurs. Les vecteurs appartenant à la base de test sont représentés en Figure 3.17. La méthode des  $k$  plus proches voisins classique donne un taux de classification de 85,82 % et le cas crédibiliste 85,89 %. Les deux approches sont équivalentes. Les matrices de confusion (Table 3.11) permettent d'observer une confusion

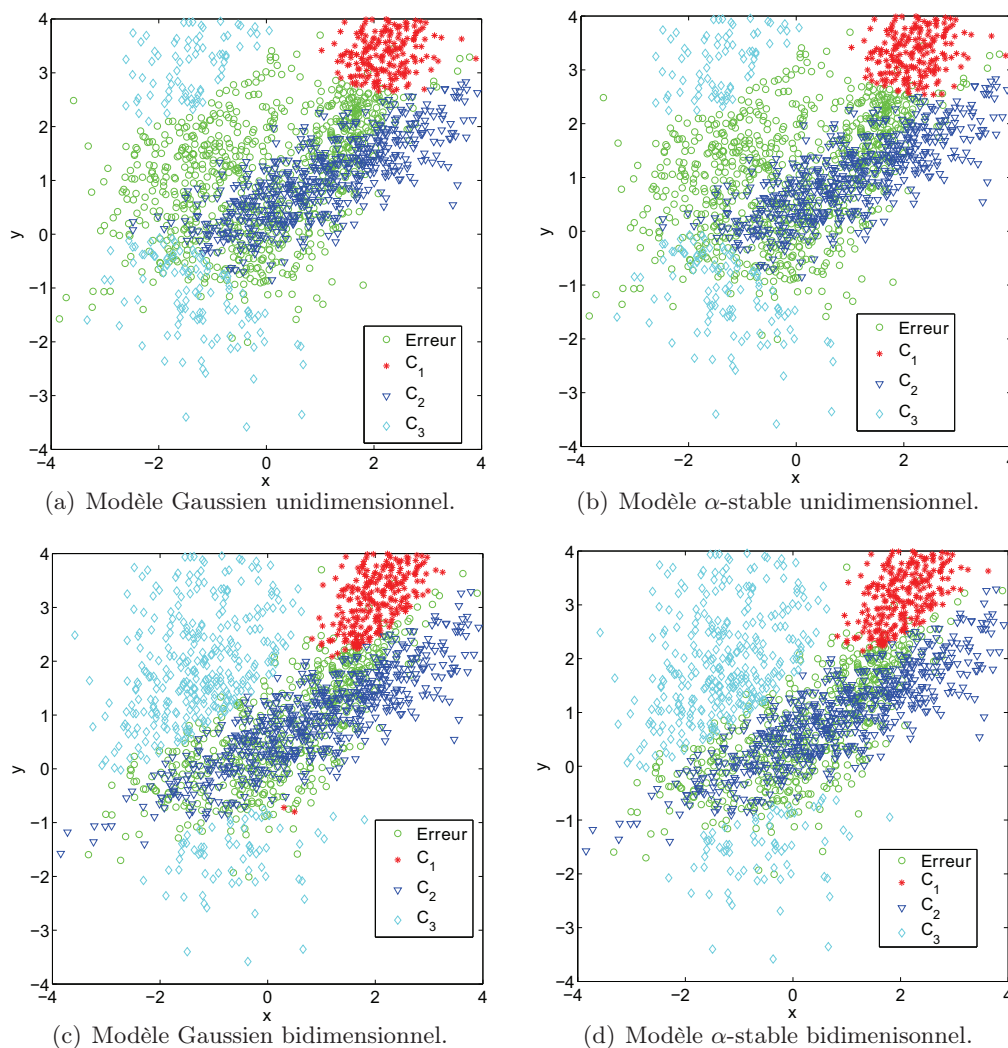


FIGURE 3.14 – Représentation de la classification de données générées Gaussiennes par la méthode Bayésienne.

pour la classe  $C_1$  qui est soit classée  $C_2$  ou  $C_3$ .

Ensuite, nous comparons les résultats obtenus à l'aide des différentes méthodes utilisant une approche de type modèle. Dans un premier temps, nous supposons que chaque composante des vecteurs peut être considérée comme un attribut. La base d'apprentissage permet d'estimer les paramètres de chaque distribution univariée Gaussienne et  $\alpha$ -stable. L'hypothèse  $H_1$  : "Les échantillons suivent un modèle Gaussien" n'est pas vérifiée par le test de Kolmogorov-Smirnov (Table 3.13). Ceci est confirmé si l'on trace la fonction de répartition réelle et celle estimée avec le modèle Gaussien (Figure 3.20). La fonction de densité de probabilité est donc mal estimée dans le cas Gaussien (Figure 3.21). En réalité, il faudrait stopper la classification et rejeter l'hypothèse  $H_1$ . Cependant, nous continuons la classification. Par contre, l'hypothèse  $H_2$  : "Les échantillons suivent un modèle  $\alpha$ -stable" est bien vérifiée par le test de Kolmogorov-Smirnov (Table 3.13). L'approche Bayésienne avec le modèle Gaussien (*cf.* Figure 3.19(a) et Table 3.12) donne un taux de classification 51,56 % et le modèle  $\alpha$ -stable (*cf.* Figure 3.19(b) et Table 3.12) donne un taux de classification de 86,36 %. La matrice de confusion obtenue pour le modèle Gaussien permet de revoir une grande confusion entre les classes  $C_1$  et  $C_2$  ainsi que les classes  $C_3$  et  $C_1$ . La méthode

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits			Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>10,93 %</b>	17,85 %	0,28 %	$C_1$	<b>11,61 %</b>	17,17 %	0,28 %
$C_2$	0,45 %	<b>31,13 %</b>	2,91 %	$C_2$	0,62 %	<b>30,91 %</b>	2,97 %
$C_3$	0,17 %	25,64 %	<b>10,58 %</b>	$C_3$	0,17 %	25,81 %	<b>10,41 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits			Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>14,02 %</b>	14,42 %	0,62 %	$C_1$	<b>11,61 %</b>	17,17 %	0,28 %
$C_2$	0,34 %	<b>33,42 %</b>	0,74 %	$C_2$	0,62 %	<b>30,91 %</b>	2,97 %
$C_3$	0,74 %	13,96 %	<b>21,69 %</b>	$C_3$	0,17 %	25,81 %	<b>10,41 %</b>

TABLE 3.6 – Matrice de confusion dans le cas de données générées Gaussiennes (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 1d ; en haut à droite : approche Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable 1d ; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable 2d)

		$H_1$		$H_2$	
		p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$	1 <sup>ière</sup> composante	0,1797	0,0843	0,8799	0,0452
	2 <sup>ième</sup> composante	0,8799	0,0452	0,9575	0,0392
$C_2$	1 <sup>ière</sup> composante	0,4291	0,0681	0,4890	0,0650
	2 <sup>ième</sup> composante	0,3736	0,0712	0,3228	0,0743
$C_3$	1 <sup>ière</sup> composante	0,9985	0,0290	0,5956	0,0580
	2 <sup>ième</sup> composante	0,4719	0,0638	0,6602	0,0551

TABLE 3.7 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d’une loi Gaussienne dans  $\mathbb{R}$ .

par fonctions de croyance pour le cas Gaussien donne un taux de classification de 76,84 % (cf. Figure 3.22(a) et Table 3.15) tandis que le modèle  $\alpha$ -stable donne un taux de classification de 87,15 % (cf. Figure 3.22(a) et Table 3.15). On peut voir que dans le cas Gaussien, l’approche avec les fonctions de croyance donnent des résultats significativement meilleurs que la méthode Bayésienne.

Ensuite, nous considérons un vecteur à deux dimensions à classifier. Un test de Kolmogorov-Smirnov est réalisé au préalable pour évaluer la validité des modèles. L’hypothèse  $H_1$  peut être rejetée puisque le test de Kolmogorov-Smirnov n’est pas vérifié (Table 3.14).

Cependant, l’hypothèse  $H_2$  est valide. L’approche Bayésienne avec le modèle Gaussien donne un taux de classification de 51,56 % (cf. Figure 3.19(c) et Table 3.12) tandis que le modèle  $\alpha$ -stable donne un taux de classification de 86,49 % (cf. Figure 3.19(d) et Table 3.12). On peut voir que l’approche à une dimension et à deux dimensions sont similaires s’expliquant par le fait que les classes sont plus disjointes que pour l’exemple Gaussien. L’approche à partir des fonctions de croyance continues permet d’obtenir un taux de classification de 77,71 % avec le modèle Gaussien (cf. Figure 3.22(c) et Table 3.15) et de 87,42 % avec le modèle  $\alpha$ -stable (cf. Figure 3.22(d) et Table 3.15).

Après avoir validé la chaîne de classification sur des données générées, nous nous intéressons à la classification de données réelles.



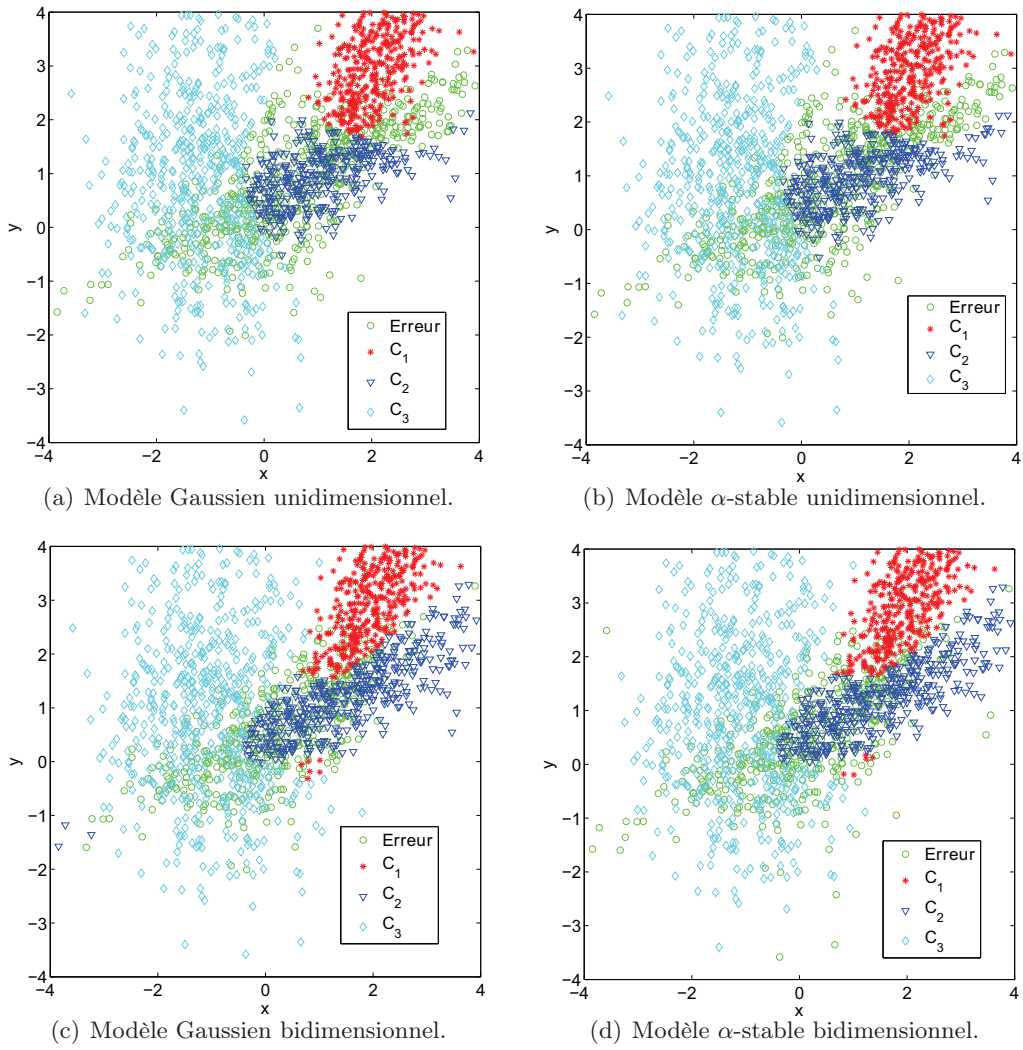


FIGURE 3.15 – Représentation de la classification de données générées Gaussiennes par la théorie des fonctions de croyance continues.

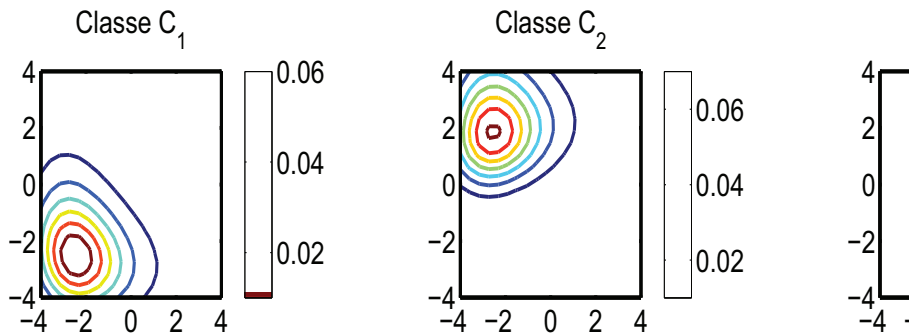


FIGURE 3.16 – Représentation de la densité de probabilité  $\alpha$ -stable.

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>18,54 %</b>	9,21 %	1,31 %
$C_2$	6,81 %	<b>18,88 %</b>	8,81 %
$C_3$	0,62 %	5,38 %	<b>30,39 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>18,14 %</b>	9,61 %	1,31 %
$C_2$	6,01 %	<b>19,69 %</b>	8,81 %
$C_3$	0,51 %	5,43 %	<b>30,45 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>18,94 %</b>	8,24 %	1,88 %
$C_2$	2,17 %	<b>23,01 %</b>	9,33 %
$C_3$	0,45 %	3,09 %	<b>32,85 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>18,77 %</b>	8,47 %	1,83 %
$C_2$	2,28 %	<b>22,61 %</b>	9,61 %
$C_3$	0,91 %	3,26 %	<b>32,22 %</b>

TABLE 3.8 – Matrice de confusion dans le cas de données générées Gaussiennes (en haut à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 1d ; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle  $\alpha$ -stable 1d ; en bas à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle  $\alpha$ -stable 2d).

	$H_1$		$H_2$	
	p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$	0,5706	0,0602	0,1509	0,0873
$C_1$	0,3736	0,0712	0,1997	0,0836
$C_3$	0,3623	0,0696	0,1665	0,1665

TABLE 3.9 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi Gaussienne dans  $\mathbb{R}^2$ .

	$\alpha$	$\sigma$	$\theta$	$\delta$
Classe $C_1$	1,5	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$
Classe $C_2$	1,5	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$
Classe $C_3$	1,5	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

TABLE 3.10 – Paramètres caractérisant les distributions  $\alpha$ -stable générées.

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_1$	<b>21,02 %</b>	2,52 %	12,04 %
$C_2$	0,66 %	<b>24,61 %</b>	7,71 %
$C_3$	0,13 %	0,06 %	<b>31,20 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$C_2$	<b>27,01 %</b>	3,92 %	4,65 %
$C_2$	1,19 %	<b>29,80 %</b>	1,99 %
$C_3$	0,59 %	0,46 %	<b>30,33 %</b>

TABLE 3.11 – Matrice de confusion dans le cas de données générées par une  $\alpha$ -stable (à gauche kppv et à droite kppv crédibiliste)



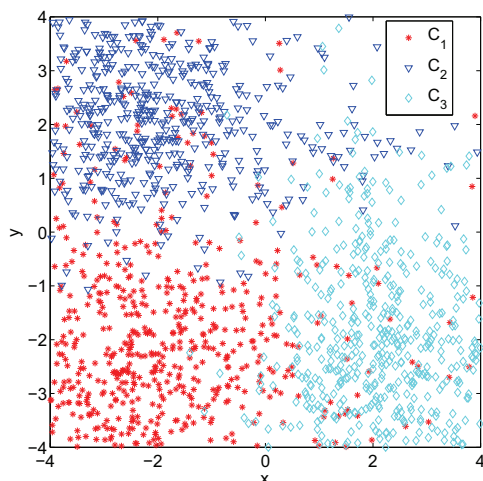


FIGURE 3.17 – Représentation de la base de test.

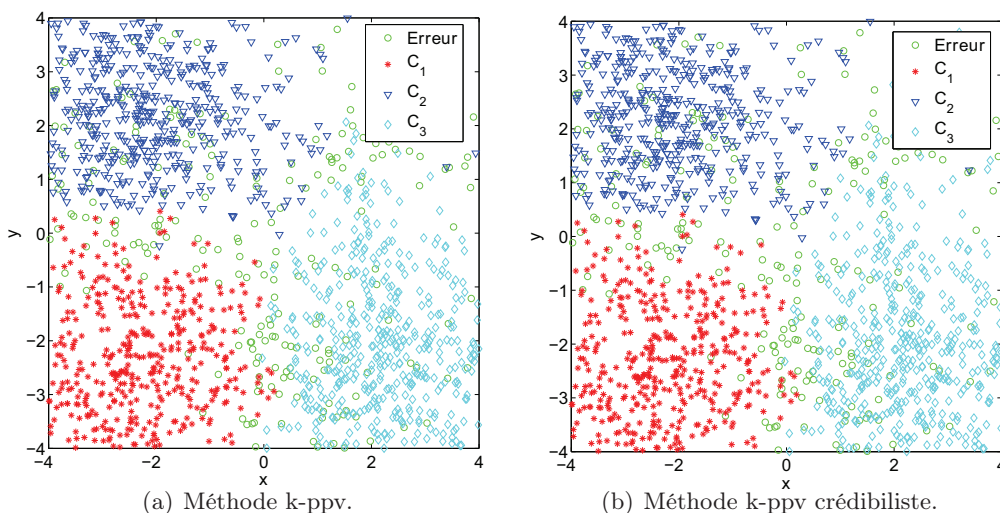


FIGURE 3.18 – Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des  $k$  plus-proches voisins.

### 3.3.2 Classification de données réelles

Dans cette section, nous allons classifier des données réelles acquises par un sondeur monofaisceau. Les données sont fournies par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM). Elles représentent un signal d'amplitude 1D en fonction du temps. Des paramètres sont extraits directement de l'amplitude des échos [178].

#### 3.3.2.1 Présentation des données

Les données ont été prélevées au large de Toulon par le SHOM à partir d'un robot sous-marin (que l'on nomme aussi AUV pour *Autonomous Underwater Vehicle*) Daurade. Les données sont acquises par un sondeur monofaisceau Altas DESO 35. Les signaux que nous obtenons représentent l'écho du fond (figure 3.23). L'étape suivante consiste à calculer différents paramètres statistiques à partir de l'écho du fond. Ces paramètres sont les mêmes que ceux utilisés par le logiciel QTC-View (environ 166 paramètres). On dispose d'une base de données de 4853

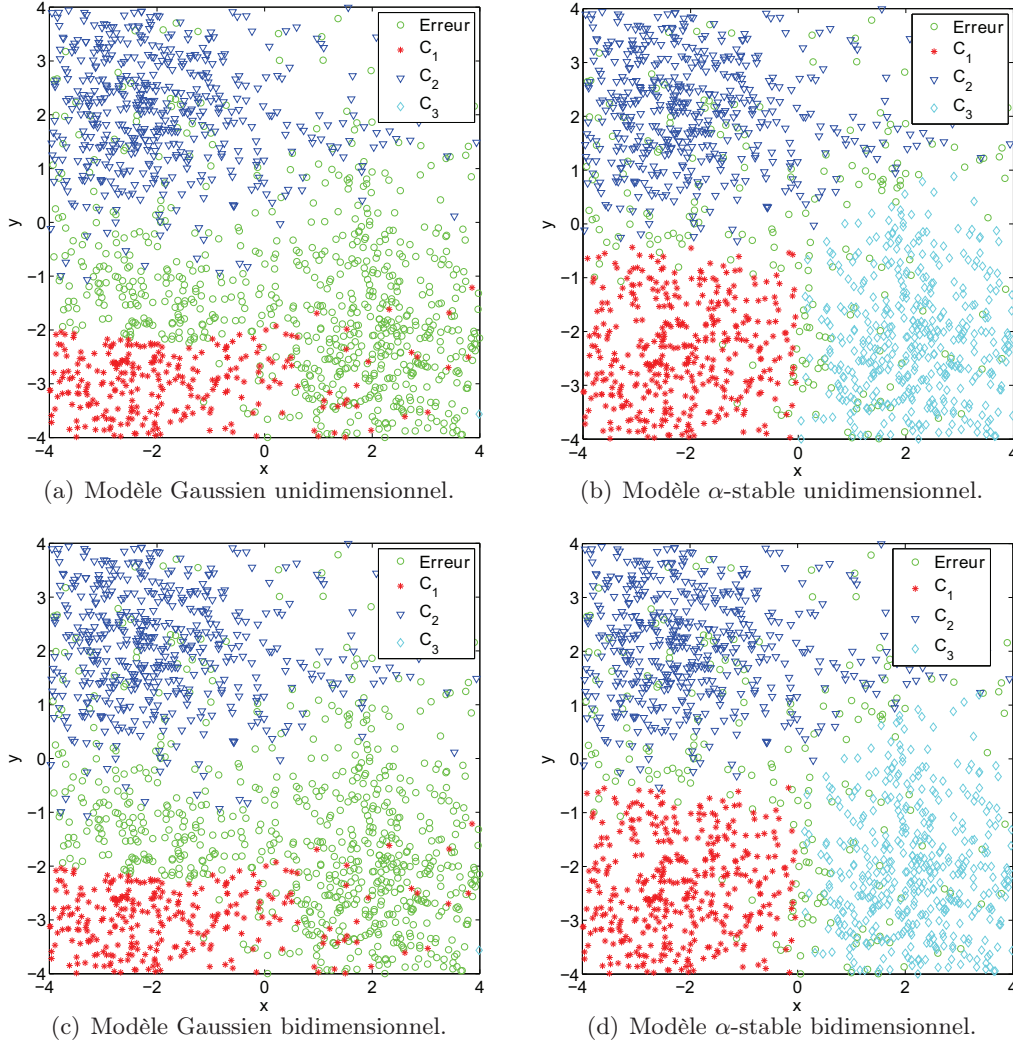


FIGURE 3.19 – Représentation de la classification de données générées  $\alpha$ -stables par la méthode Bayésienne.

échantillons classifiés vase, 6017 échantillons classifiés roche et 7338 échantillons classifiés sable. L'inconvénient est que nous avons beaucoup d'attributs à notre disposition et nous ne pouvons pas choisir "à la main" ceux qui sont les plus "pertinents". L'objectif est de choisir les attributs qui discriminent au mieux les différentes classes. Une liste de méthodes permettant de sélectionner des attributs pertinents est présentée dans [110]. Les méthodes de sélection d'attributs se décomposent en deux grandes familles :

- les méthodes *Wrapper* qui permettent d'optimiser les performances d'un algorithme de classification spécifique.
- les méthodes *Filter* qui sélectionnent les attributs à partir d'une mesure.

Nous avons tout d'abord utilisé les méthodes *Filter* avec comme mesure une distance de Bhattacharyya [21], un score de Fisher [117]. Loin d'être performantes, nous ne les avons pas intégrées dans ce manuscrit. Pour montrer l'intérêt de la théorie des fonctions de croyance, nous nous sommes dirigés vers une méthode *Wrapper*, le problème étant de maximiser le résultat de classification à partir de la théorie des fonctions de croyance continues. Les paramètres retenus sont : 3<sup>ème</sup> quantile de l'amplitude et 75<sup>ème</sup> quantile de l'énergie cumulée du signal. Nous représentons

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>18,56 %</b>	17,03 %	0 %
sable	0 %	<b>33,02 %</b>	0 %
vase	23,28 %	8,11 %	<b>0 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>11,61 %</b>	17,17 %	0,28 %
sable	0,62 %	<b>30,91 %</b>	2,97 %
vase	0,17 %	25,81 %	<b>10,41 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>21,75 %</b>	2,52 %	11,31 %
sable	0,59 %	<b>24,81 %</b>	7,58 %
vase	0,19 %	0,06 %	<b>31,13 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>27,27 %</b>	4,12 %	4,19 %
sable	1,06 %	<b>30,27 %</b>	1,66 %
vase	0,86 %	0,66 %	<b>29,87 %</b>

TABLE 3.12 – Matrice de confusion dans le cas de données générées  $\alpha$ -stable (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 1d ; en haut à droite : approche Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable 1d ; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable 2d)

		$H_1$		$H_2$	
		p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$	1 <sup>ière</sup> composante	$0,0121 \cdot 10^{-4}$	0,2094	0,4231	0,0687
	2 <sup>ième</sup> composante	$0,633 \cdot 10^{-4}$	0,1781	0,8657	0,0469
$C_2$	1 <sup>ière</sup> composante	$0,1351 \cdot 10^{-3}$	0,0681	0,3141	0,0725
	2 <sup>ième</sup> composante	$0,3616 \cdot 10^{-3}$	0,1565	0,4150	0,0667
$C_3$	1 <sup>ière</sup> composante	$1,9787 \cdot 10^{-20}$	0,3672	0,6418	0,0567
	2 <sup>ième</sup> composante	$0,432 \cdot 10^{-6}$	0,2119	0,9265	0,0418

TABLE 3.13 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}$ .

		$H_1$		$H_2$	
		p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$		$6,3396 \cdot 10^{-13}$	0,2969	0,1641	0,0875
$C_1$		$1,2052 \cdot 10^{-7}$	0,2174	0,3141	0,0725
$C_3$		$5,6396 \cdot 10^{-31}$	0,4537	0,3963	0,0687

TABLE 3.14 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données issues d'une loi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}^2$ .

ces paramètres dans un espace à deux dimensions (Figure 3.24).

### 3.3.2.2 Résultats numériques

Nous choisissons aléatoirement 5000 vecteurs dont la moitié est utilisée pour l'apprentissage et l'autre pour la base de test. Tout d'abord, nous travaillons dans le cas unidimensionnel.

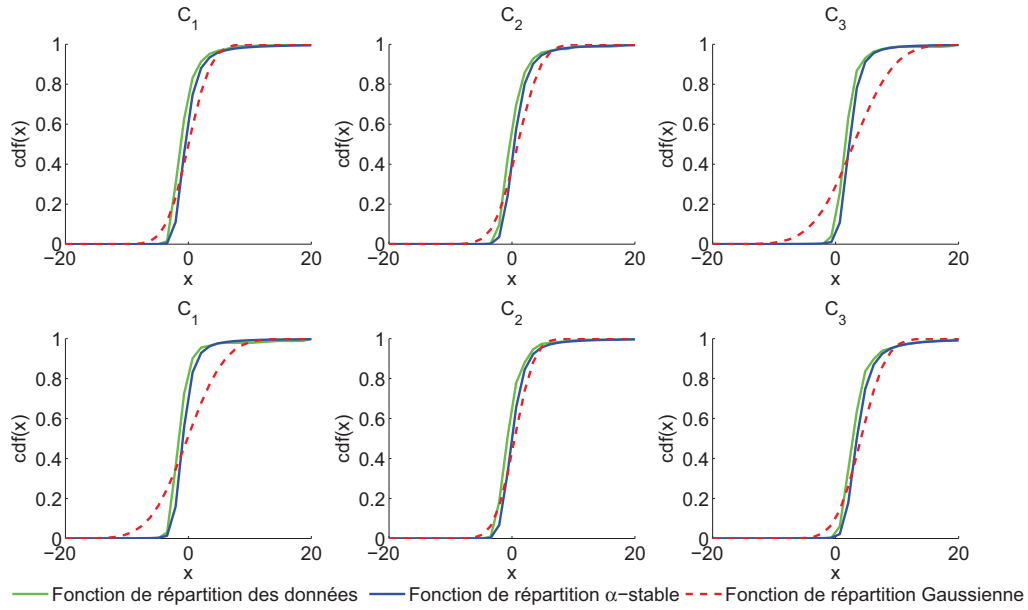


FIGURE 3.20 – Représentation de l’estimation des fonctions de répartition dans le cas de données issues d’une loi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}$ .

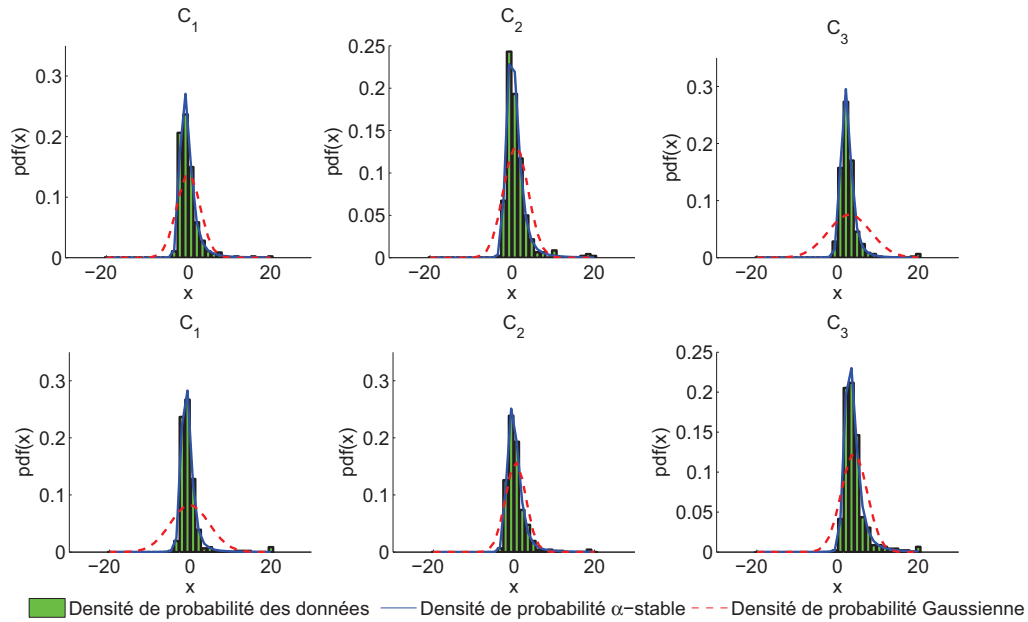


FIGURE 3.21 – Représentation de l’estimation des densités de probabilité dans le cas de données issues d’une loi  $\alpha$ -stable dans  $\mathbb{R}$ .

**Cas unidimensionnel** En observant les estimations des densités de probabilité de chaque classe, nous remarquons que le modèle  $\alpha$ -stable correspond plutôt bien aux données contrairement au modèle Gaussien. Le test de Kolmogorov-Smirnov permet de valider l’hypothèse “ $H_2$  : les échantillons suivent le modèle  $\alpha$ -stable” puisque le test de Kolmogorov-Smirnov n’est pas vérifié pour le modèle Gaussien.

En termes de taux de classification, on remarque que le modèle Gaussien donne des résultats significativement moins bons que ceux obtenus par le modèle  $\alpha$ -stable. Pour le modèle

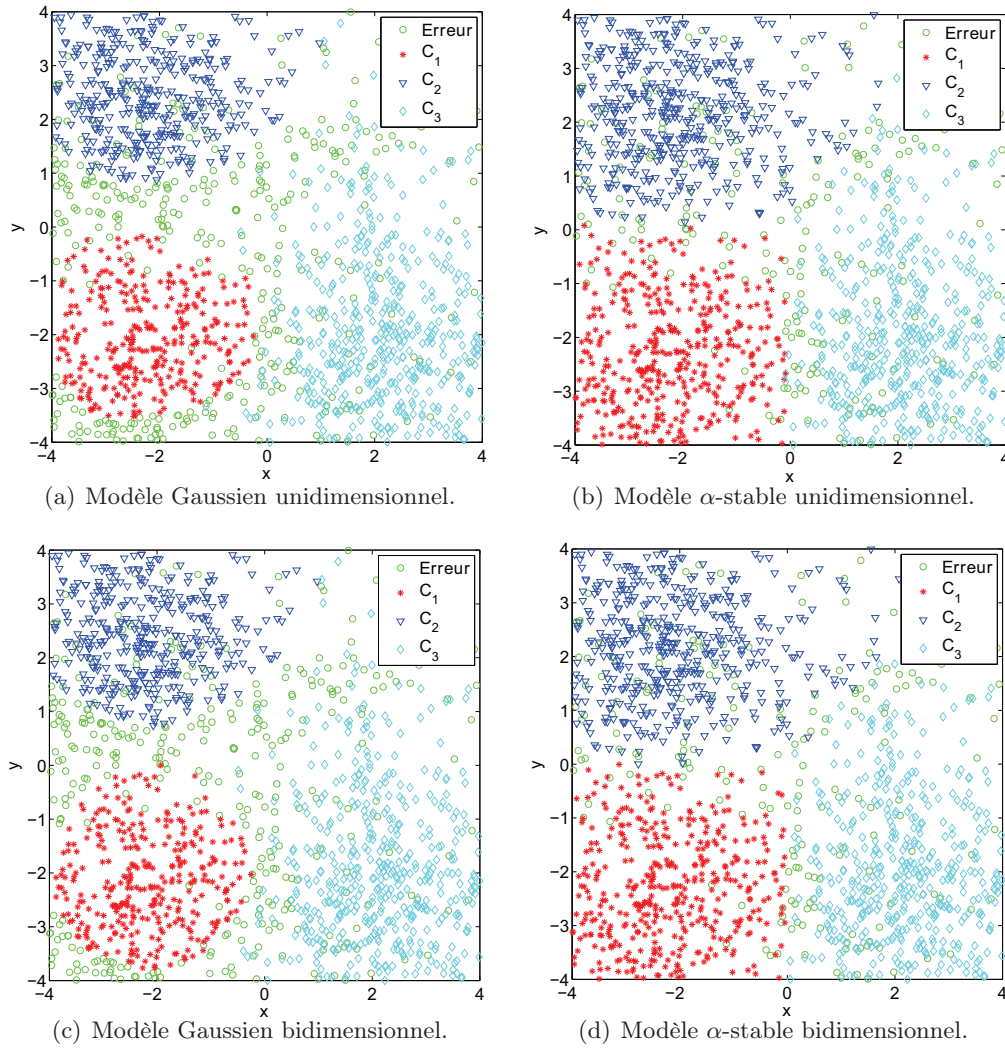


FIGURE 3.22 – Représentation de la classification de données générées  $\alpha$ -stables par la théorie des fonctions de croyance.

Gaussien, on remarque que l'approche Bayésienne (taux de bonne classification de 61,24 %) est significativement moins bonne que l'approche par la théorie des fonctions de croyance (taux de classification de 70,92 %). On ne peut pas faire la même conclusion dans le cas du modèle  $\alpha$ -stable. En effet, l'approche Bayésienne (taux de classification de 80,64 %) et l'approche avec les fonctions de croyance (taux de classification de 82,68 %) sont significativement les mêmes.



Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>21,02 %</b>	2,52 %	12,04 %
sable	0,66 %	<b>24,61 %</b>	7,71 %
vase	0,13 %	0,06 %	<b>31,20 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>27,01 %</b>	3,92 %	4,65 %
sable	1,19 %	<b>29,80 %</b>	1,99 %
vase	0,59 %	0,46 %	<b>30,33 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>21,75 %</b>	2,52 %	11,31 %
sable	0,59 %	<b>24,81 %</b>	7,58 %
vase	0,19 %	0,06 %	<b>31,13 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>27,27 %</b>	4,12 %	4,19 %
sable	1,06 %	<b>30,27 %</b>	1,66 %
vase	0,86 %	0,66 %	<b>29,87 %</b>

TABLE 3.15 – Matrice de confusion dans le cas de données générées  $\alpha$ -stable (en haut à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 1d ; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle  $\alpha$ -stable 1d ; en bas à gauche : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien 2d, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle  $\alpha$ -stable 2d)

		$H_1$		$H_2$	
		p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$	1 <sup>ière</sup> composante	$0,37 \cdot 10^{-3}$	0,1587	0,2956	0,0749
	2 <sup>ième</sup> composante	$0,00 \cdot 10^{-3}$	0,2814	0,6399	0,0569
$C_2$	1 <sup>ière</sup> composante	0,0002	0,4507	0,4507	0,0659
	2 <sup>ième</sup> composante	0,0092	0,1257	0,7696	0,0509
$C_3$	1 <sup>ière</sup> composante	$0,00 \cdot 10^{-5}$	0,2861	0,8799	0,0452
	2 <sup>ième</sup> composante	$0,68 \cdot 10^{-5}$	0,1928	0,1797	0,0843

TABLE 3.16 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données réelles de  $\mathbb{R}$ .

		$H_1$		$H_2$	
		p-value	ksstat	p-value	ksstat
$C_1$		$2,84 \cdot 10^{-18}$	0,3473	0,0719	0,0988
$C_1$		$3,61 \cdot 10^{-11}$	0,2695	0,1063	0,0928
$C_3$		$2,75 \cdot 10^{-20}$	0,3675	0,2127	0,0813

TABLE 3.17 – Valeurs statistiques obtenues pour un test de Kolmogorov-Smirnov avec un niveau de signification de 5 % effectué sur des données réelles de  $\mathbb{R}^2$ .

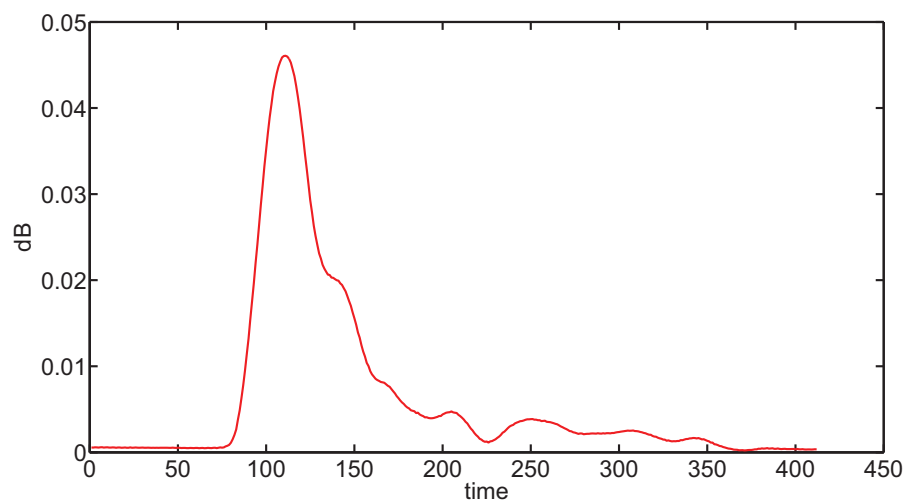


FIGURE 3.23 – Représentation de l'écho d'un fond vaseux en fonction du temps.

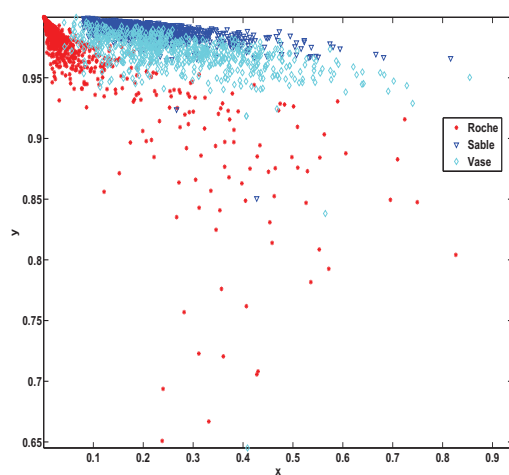


FIGURE 3.24 – Représentation des données réelles dans un espace à deux dimensions (l'abscisse correspond au paramètre 3<sup>ième</sup> quantile de l'amplitude et l'ordonnée correspond au paramètre 75<sup>ième</sup> quantile de l'énergie cumulée du signal).

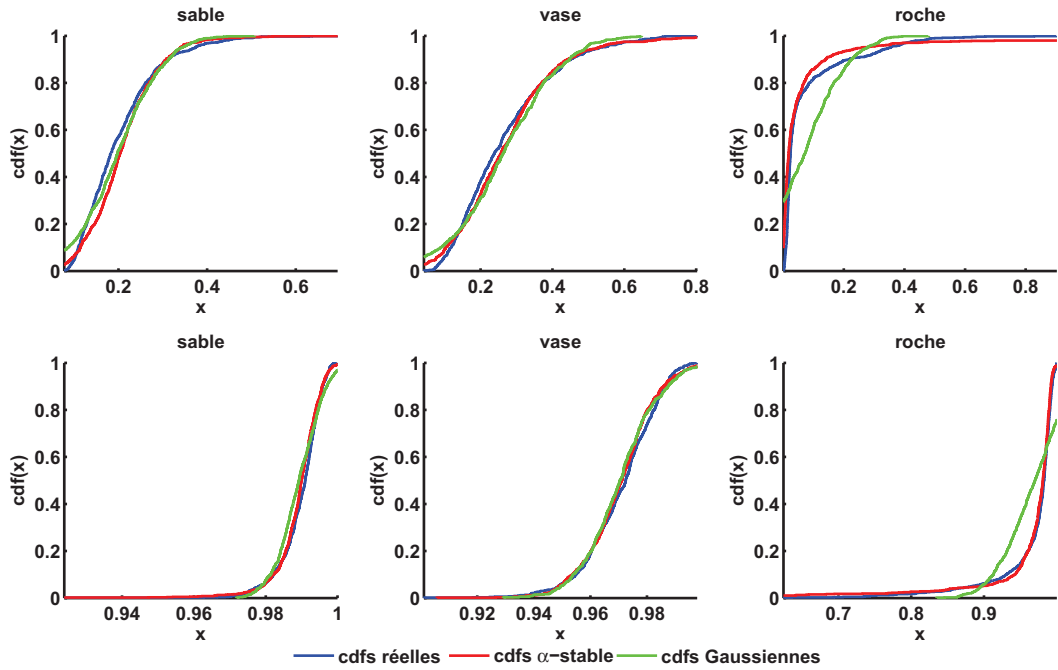


FIGURE 3.25 – Représentation des fonctions de répartition des attributs et leurs estimations par le modèle Gaussien et  $\alpha$ -stable (la première colonne correspond au paramètre appelé 3<sup>ième</sup> quantile de l’amplitude et la deuxième colonne au paramètre appelé 75<sup>ième</sup> quantile de l’énergie cumulée du signal).

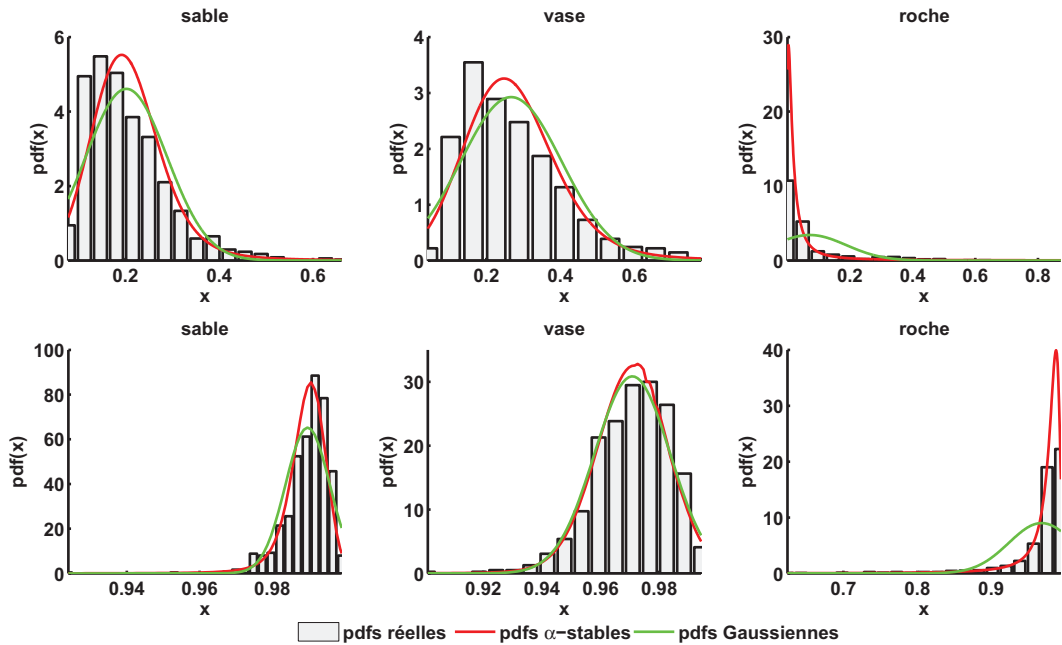


FIGURE 3.26 – Représentation des densités de probabilité des attributs et leurs estimations par le modèle Gaussien et  $\alpha$ -stable (la première colonne correspond au paramètre appelé 3<sup>ième</sup> quantile de l’amplitude et la deuxième colonne au paramètre appelé 75<sup>ième</sup> quantile de l’énergie cumulée du signal).



Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>8,48 %</b>	23,00 %	1,28 %
sable	0,00 %	<b>37,32 %</b>	2,80 %
vase	0,36 %	11,32 %	<b>15,44 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>32,40 %</b>	0,00 %	0,36 %
sable	12,44 %	<b>20,92 %</b>	6,76 %
vase	7,20 %	2,32 %	<b>17,60 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>28,28 %</b>	0,04 %	4,44 %
sable	0,00 %	<b>34,88 %</b>	5,24 %
vase	0,84 %	6,76 %	<b>19,52 %</b>

Type de fonds vérité terrain	Type de fonds prédits		
	roche	sable	vase
roche	<b>26,48 %</b>	0,00 %	6,28 %
sable	0,00 %	<b>29,84 %</b>	10,28 %
vase	0,52 %	2,48 %	<b>24,12 %</b>

TABLE 3.18 – Matrice de confusion dans le cas de données réelles (en haut à gauche : approche Bayésienne avec le modèle Gaussien ; en haut à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle Gaussien ; en bas à gauche : approche Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable, en bas à droite : approche fonctions de croyance continues avec le modèle  $\alpha$ -stable)

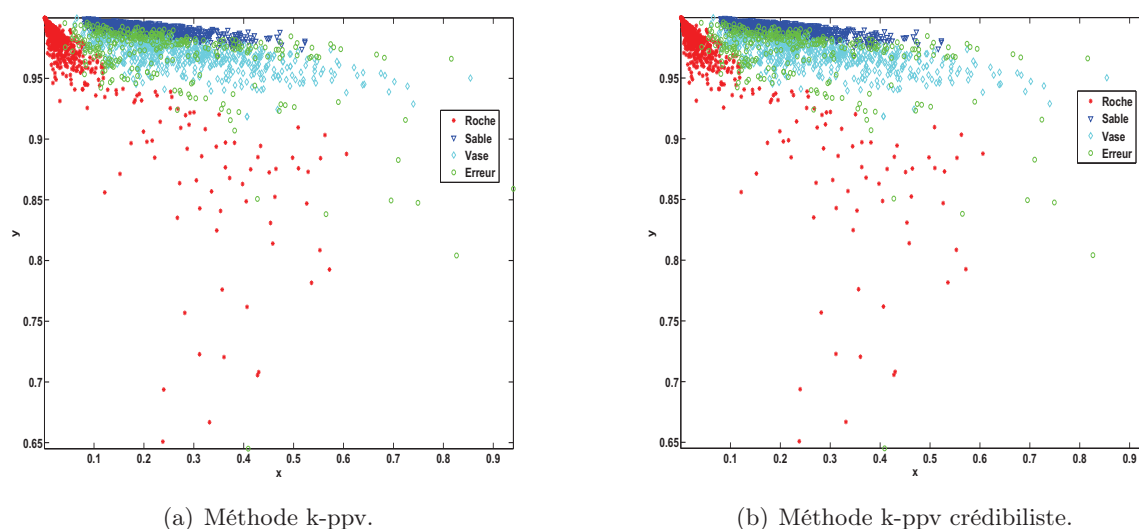
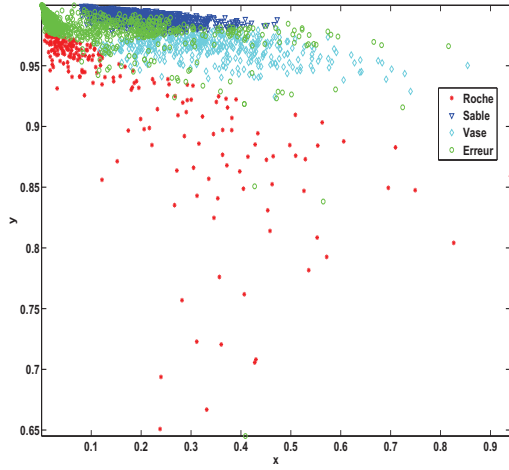
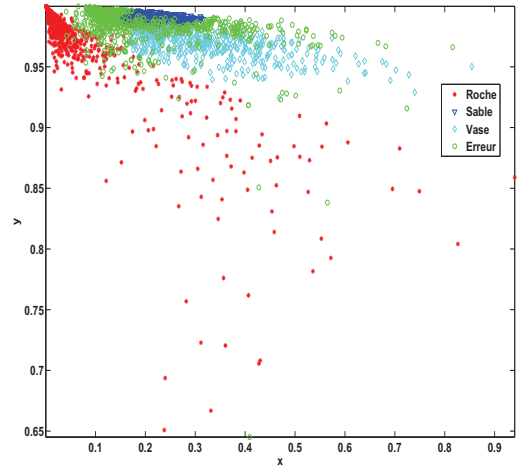


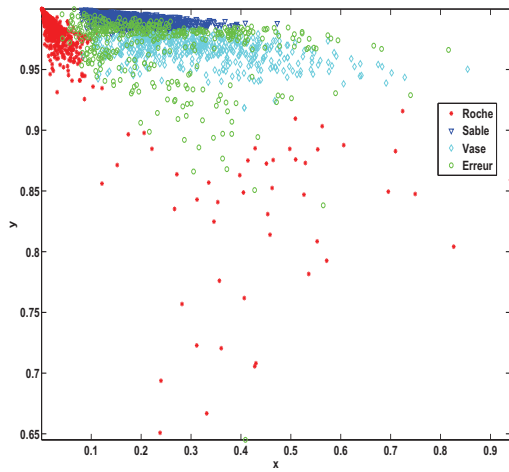
FIGURE 3.27 – Représentation de la classification des vecteurs par la méthode des  $k$  plus proches voisins.



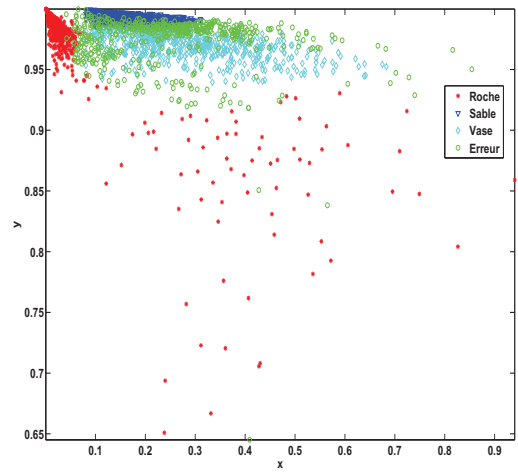
(a) Méthode Bayésienne avec le modèle Gaussien.



(b) Méthode de la théorie des fonctions de croyance avec le modèle Gaussien.



(c) Méthode Bayésienne avec le modèle  $\alpha$ -stable.



(d) Méthode de la théorie des fonctions de croyance avec le modèle  $\alpha$ -stable.

FIGURE 3.28 – Représentation de la base de test classifiée.

### 3.4 Conclusion

Afin de classifier au mieux les sédiments marins à partir de signaux issus d'un sondeur monofaisceau, nous avons introduit les distributions  $\alpha$ -stables pour modéliser les phénomènes de queue lourde et d'asymétrie des données. Dans ce chapitre, nous avons utilisé le formalisme de la théorie des fonctions de croyance afin de classifier des données. L'avantage de la théorie des fonctions de croyance est de modéliser l'imprécision et l'incertitude des données par rapport à des méthodes couramment utilisées. Nous modélisons des attributs à partir de densités de probabilité continues pour classifier des données discrètes. Du point de vue théorique, le calcul de la fonction de plausibilité dans le cas d'une densité de probabilité Gaussienne a été proposé par Caron *et al.*. Nous avons étendu le calcul de la fonction de plausibilité au cas de densités de probabilité  $\alpha$ -stables. Cependant, le calcul est réalisé numériquement puisque la densité de probabilité  $\alpha$ -stable n'a pas d'expression analytique ce qui a pour effet d'augmenter les temps de calculs.

Dans un premier temps, nous avons classifié des données générées issues de lois Gaussiennes puis de lois  $\alpha$ -stables. Dans le cas de données générées Gaussiennes, nous nous sommes rendu compte que la méthode utilisant la théorie des fonctions de croyance permettaient d'avoir des résultats significativement meilleurs que la méthode Bayésienne. Le choix entre un modèle Gaussien et un modèle  $\alpha$ -stable n'a pas d'influence sur les taux de classification puisque les données ont été choisies comme Gaussiennes, qui est un cas particulier de lois  $\alpha$ -stables. En termes de comparaison, nous avons utilisé la méthode des  $k$  plus proches voisins et les résultats sont voisins de l'approche par la théorie des fonctions de croyance. Nous obtenons des meilleurs résultats avec l'approche par fonctions de croyance lorsque nous considérons un vecteur à une dimension sans étape de combinaison.

Dans le cas de données générées à partir de lois  $\alpha$ -stables, le choix du modèle s'est avéré important. Le modèle  $\alpha$ -stable donne de meilleurs résultats que ceux obtenus par le modèle Gaussien, ce qui est tout à fait normal puisque les données initiales sont issues de lois  $\alpha$ -stables. Le test de Kolmogorov-Smirnov permet de confirmer que l'hypothèse "les échantillons sont issus d'une loi gaussienne" n'est pas valide et donc de la rejeter. Ensuite, l'approche Bayésienne donne des résultats significativement moins bons que ceux obtenus par la théorie des fonctions de croyance. Cependant, les taux de classification restent inchangés lorsque nous travaillons avec un vecteur à deux dimensions. En effet, la représentation des données à 1 et 2 dimensions permet de mettre en évidence de la confusion entre les différentes classes.

Dans un second temps, nous avons modélisé et classifié des données réelles issues d'un sondeur monofaisceau. Les résultats de classification utilisant les lois  $\alpha$ -stables pour modéliser les données sont significativement meilleurs que ceux utilisant la loi Gaussienne. Cette tendance est confirmée par le test de Kolmogorov-Smirnov qui rejette l'hypothèse que les données soient issues d'une loi Gaussienne. Cependant, on remarque que la méthode Bayésienne et la méthode par la théorie des fonctions de croyance donnent des résultats significativement identiques dans le cas où les données sont supposées être issues de lois  $\alpha$ -stables. À noter que dans le cas des données sonar, le passage à un vecteur à deux dimensions ne permet pas d'améliorer le taux de classification. En effet, on remarque qu'il y a beaucoup de confusion entre les données. La classification des données monofaisceaux a fait l'objet d'une communication [81].

À ce stade, nous n'avons considéré qu'un seul capteur (sondeur monofaisceau). Une des perspectives de travail est donc de travailler avec plusieurs capteurs, comme par exemple un sonar latéral, pour tenter d'augmenter les résultats de classification.

## Chapitre 4

# Caractérisation statistique du fouillis de mer

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>96</b>
<b>4.2</b>	<b>Description de la surface maritime</b>	<b>97</b>
4.2.1	Propriétés physiques de la surface maritime	97
4.2.1.1	Température de surface de l'eau de mer	98
4.2.1.2	Salinité de l'eau de mer	98
4.2.1.3	Caractéristique électromagnétique	98
4.2.1.4	Influence du vent	100
4.2.2	Propriétés géométriques de la surface de mer	102
4.2.2.1	Surface de mer à une dimension	103
4.2.2.2	Distribution des hauteurs	103
4.2.2.3	Distributions des pentes	104
4.2.2.4	Fonction d'auto-corrélation	105
4.2.2.5	Modélisation spectrale	105
4.2.3	Spectre de mer et vagues	113
<b>4.3</b>	<b>Modèles asymptotiques de diffusion électromagnétique</b>	<b>116</b>
4.3.1	Approximation de Kirchhoff	118
4.3.2	Méthode des petites perturbations	119
4.3.3	Optique physique	120
<b>4.4</b>	<b>Simulation et analyse statistique</b>	<b>124</b>
4.4.1	Méthodologie et chaîne de traitement	124
4.4.2	Interprétation des résultats et choix du modèle	126
4.4.2.1	Comparaison des distributions : Weibull, $\mathcal{K}$ et $\alpha$ -stable	126
4.4.2.2	Influence des paramètres des distributions $\alpha$ -stables	128
4.4.2.3	Détection	132
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>134</b>

---

*Dans le chapitre précédent, nous avons développé une méthode de classification supervisée modélisant les attributs par des distributions  $\alpha$ -stables. L'objectif de ce chapitre est de caractériser le fouillis de mer en utilisant différentes distributions statistiques. Dans un premier temps, nous introduisons les différentes caractéristiques électromagnétiques et géométriques permettant de générer notre modèle de surface de mer (considérée comme rugueuse et aléatoire). Nous utilisons une approche spectrale afin de décrire la surface de mer à partir du spectre d'Elfouhaily. Ensuite,*

*il est important d'introduire les différentes méthodes permettant de déterminer la surface équivalente radar d'une surface maritime. Nous distinguons deux types de méthodes : les méthodes dites exactes et les méthodes asymptotiques. Pour ce faire, nous avons adopté l'utilisation de méthodes asymptotiques : l'optique physique. Une fois la surface équivalente radar déterminée, nous étudions les coefficients de diffusion à partir d'un modèle statistique. Nous regardons plus particulièrement l'influence de la polarisation, de la vitesse de vent et de la direction de vent sur les paramètres des distributions  $\alpha$ -stables.*

## 4.1 Introduction

La caractérisation des échos indésirables réfléchis par l'environnement maritime, appelé fouillis (par abus de langage, on peut trouver aussi *clutter* qui vient de l'anglais), est une étape importante dans l'analyse des performances des différents systèmes de télédétection, ceci pour de nombreuses applications :

- identification d'objets sur la surface de mer tel qu'un périscope, un avion volant à basse altitude ou un missile permet d'assurer la sécurité des côtes.
- identification de petites embarcations, de bouées, d'icebergs ou de nappes de pétrole permet de contrôler le trafic maritime.
- surveillance et Intervention sur des bateaux pratiquant la pêche illégale.
- exploitation des signaux réfléchis par la surface maritime pour l'obtention des caractéristiques océanographiques de l'eau de mer.

Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés au sein de notre laboratoire dans l'équipe Radar, Électromagnétisme et Télédétection de l'ENSTA Bretagne (anciennement ENSIETA), et qui a intégré depuis janvier 2012 le laboratoire Lab-STICC UMR 6285. Ayari [11] étudie l'interaction d'une onde électromagnétique avec la surface maritime naturelle ou polluée. Arnold-Bos [7] et Arnold-Bos *et al.* [8,9] étudie la détection et le suivi de navire à partir de son sillage. Récemment Rochdi [187] a proposé d'évaluer la contribution du champ électromagnétique diffusé par une cible complexe placée sur une surface maritime.

Il s'avère qu'un des aspects importants à prendre en compte est de modéliser finement la surface maritime. Cette dernière peut être obtenue à partir de la superposition de surface sinusoïdales, avec des amplitudes, des directions et des pulsations différentes. Des travaux ont été menés afin de décrire la surface de mer à partir d'un spectre d'énergie. Dans la littérature, il existe plusieurs spectres comme celui de Philips [173], Pierson et Moskowitz [176], Fung et Lee [84], JONSWAP [100] et Elfouhaily [69]. Nous proposons de présenter ces différents modèles dans la première partie de ce chapitre.

Une fois la surface maritime générée, il convient d'évaluer le coefficient de diffusion électromagnétique. Plusieurs familles de méthodes existent afin de réaliser cette tâche : les méthodes asymptotiques et les méthodes dites exactes. Le problème avec les méthodes numériques est qu'elles sont coûteuses en temps de calcul. Dans le cadre de notre travail, nous proposons d'utiliser les méthodes asymptotiques afin de calculer le coefficient de diffusion électromagnétique.

Le fouillis de mer est le plus souvent considéré comme un processus stochastique [52], représentant une évolution discrète ou à temps continu d'une variable aléatoire. Il convient alors de représenter ce processus stochastique à partir de modèles statistiques. Une bibliographie assez détaillée des modèles statistiques utilisés pour représenter l'amplitude de retour du fouillis de mer, exprimée le linéaire, est réalisée dans [43]. Dans [226], les auteurs s'aperçoivent de la non-gaussiannité du clutter de mer pour des angles rasants et/ou des petites largeurs d'impulsions. Ceci se traduit par l'apparition de bruit impulsif [93] dans le signal retour. Les distributions recherchées sont celles qui présentent la propriété de queue lourde [71]. Des travaux ont été réalisés à partir de la loi log-normale, la loi de Weibull et la loi  $\mathcal{K}$ . Trunk et George [215] se sont

aperçus que la loi log-normale est un bon modèle pour représenter le fouillis de mer. Dans [219], les auteurs sont arrivés à un compromis entre une loi de Rayleigh et une loi log-normale. Schleher [195] utilise une loi de Weibull comme compromis entre la loi de Rayleigh et log-normale permettant d’avoir une bonne représentation du fouillis de mer. Fay *et al.* [75] arrivent à la même conclusion. La loi  $\mathcal{K}$  a quand à elle été introduite par Jakeman et Pusey [105] afin de modéliser l’amplitude du clutter de mer par une loi n’appartenant pas à la loi de Rayleigh. Ils ont aussi montré que cette loi était un excellent modèle pour modéliser le fouillis de mer [106]. Nohara *et al.* [161] ont montré que la distribution  $\mathcal{K}$  est un bon modèle pour représenter l’amplitude du fouillis de mer en polarisation directe (*co-polarization* en anglais) et en polarisation croisée (*cross-polarization* en anglais). On peut aussi citer le site internet du département de la défense australienne (appelé le DSTO pour *Defence Science and Technology Organisation* en anglais) où un grand nombre d’ouvrages sont consultables en libre accès [5, 55]. Toutes ces lois ont une interprétation physique. En effet, le champ électromagnétique diffusé par une surface naturelle est considéré comme une variable aléatoire résultant d’une sommation de l’ensemble des diffuseurs contenus dans la zone insonifiée [46]. Par conséquent, les phénomènes d’ombre et de diffusion multiples viennent modifier la répartition des points brillants. La loi log-normale permet de décrire une surface hétérogène présentant de nombreux forts diffuseurs (petites cellules de résolution et petits angles rasants). La loi de Weibull est appliquée lorsque la surface contient beaucoup de points brillants, dont aucun ne prédomine les autres (grandes cellules de résolution) : cette loi permet de caractériser un fouillis uniforme. La loi  $\mathcal{K}$  est utilisée lorsque les points brillants sont répartis aléatoirement dans la cellule de résolution.

Il s’avère que le fouillis de mer se caractérise principalement au niveau de la queue de la distribution du fait de la propriété de queue lourde. Récemment, les distributions  $\alpha$ -stables ont été utilisées afin de modéliser le fouillis de mer [175], et permettent de représenter ce phénomène de queue lourde. Beaucoup de travaux ont été réalisés en imagerie. Banerjee *et al.* [13] modélisent le fouillis de mer des images, obtenues par un radar à synthèse d’ouverture ultra large-bande, à partir de distributions  $\alpha$ -stables. Achim *et al.* [3] modélisent le speckle par un modèle  $\alpha$ -stable pour ensuite le retirer des images SAR. Des travaux [136, 224] ont notamment été réalisés afin de détecter des navires dans les images SAR. Les distributions  $\alpha$ -stables sont utilisées lorsque les points brillants sont nombreux et répartis aléatoirement dans la cellule de résolution.

Le chapitre est donc découpé de la manière suivante : nous présentons tout d’abord les caractéristiques électromagnétiques et géométriques de la surface maritime, avec un développement plus approfondi du spectre de mer. Ensuite, nous développons les différents modèles asymptotiques permettant d’obtenir les coefficients de diffusion électromagnétique, en particulier l’optique physique. Enfin, nous caractérisons les coefficients de diffusion électromagnétique en faisant varier les paramètres géométriques d’observations, la polarisation en émission et en réception ainsi que la vitesse et la direction du vent.

## 4.2 Description de la surface maritime

### 4.2.1 Propriétés physiques de la surface maritime

La surface maritime se caractérise par de nombreux paramètres pouvant influencer plus ou moins les coefficients de diffusion électromagnétique : température, salinité, permittivité électrique relative et le vent. Par conséquent, nous présentons les différentes caractéristiques de l’environnement maritime.



#### 4.2.1.1 Température de surface de l'eau de mer

La température de la mer, notée  $T$ , dépend de l'endroit où l'on se trouve sur la Terre, de la profondeur ainsi que de la saison (exemple de la répartition de la température de surface de la mer à travers le globe en Figure 4.1<sup>1</sup>). Dans le cadre de notre application, on ne s'intéresse qu'à la température de surface exprimée en degrés Celcius.

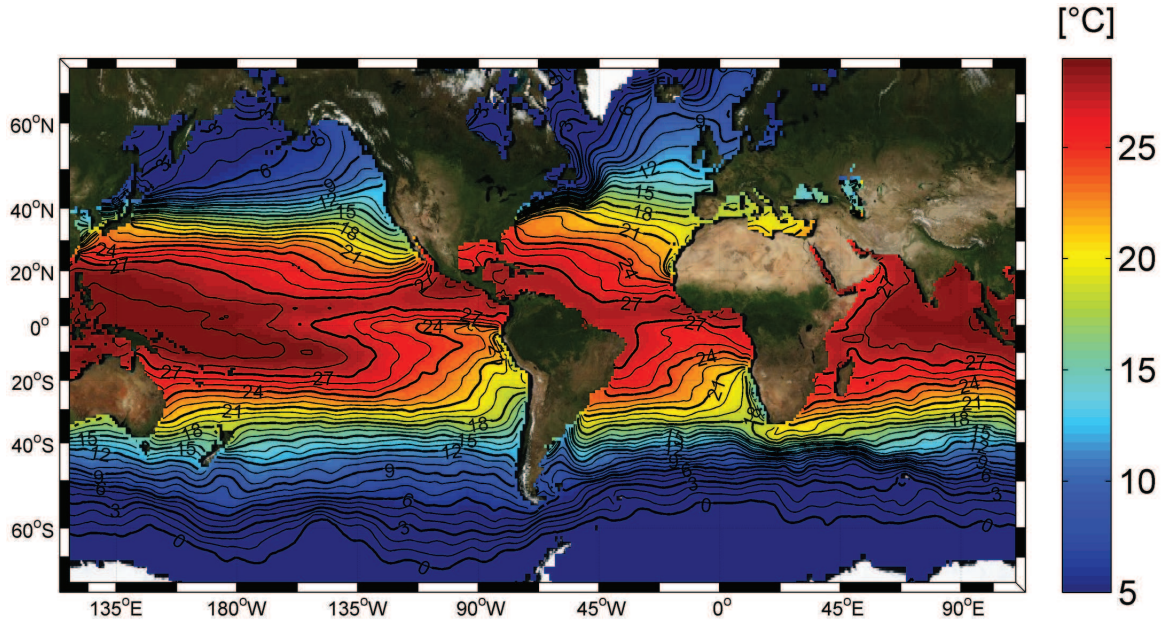


FIGURE 4.1 – Répartition de la température des océans

#### 4.2.1.2 Salinité de l'eau de mer

La salinité, notée  $S$ , est un indicateur permettant de quantifier la quantité de sel dissous dans l'eau de mer. En général, il y a 35 g de sels pour un kilogramme d'eau de mer. La salinité varie énormément d'une mer à une autre comme en témoigne la figure 4.2<sup>1</sup>. De nos jours, la salinité est mesurée à partir de la conductivité de l'eau de mer.

#### 4.2.1.3 Caractéristique électromagnétique

Les propriétés électromagnétiques de l'eau de mer sont caractérisées par deux variables : la permittivité électrique relative  $\epsilon_r$  et la perméabilité magnétique relative  $\mu_r$ . La perméabilité magnétique relative est approchée à 1 puisque l'eau de mer n'est pas un milieu magnétique. Par la suite, nous présentons les deux modèles caractérisant la permittivité électrique relative :

- le modèle de Debye.
- le modèle de Cole-Cole.

**Le modèle de Debye** Debye [49] donne une expression de la permittivité électrique relative de l'eau de mer en fonction de la salinité, de la température et de la fréquence de l'onde électromagnétique. Il obtient pour expression :

$$\epsilon_r = \epsilon_{r,\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{r,\infty}}{1 + j\omega\tau_r} - j\frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_0} \quad (4.1)$$

1. <http://www.salinityremotesensing.ifremer.fr/sea-surface-salinity/>

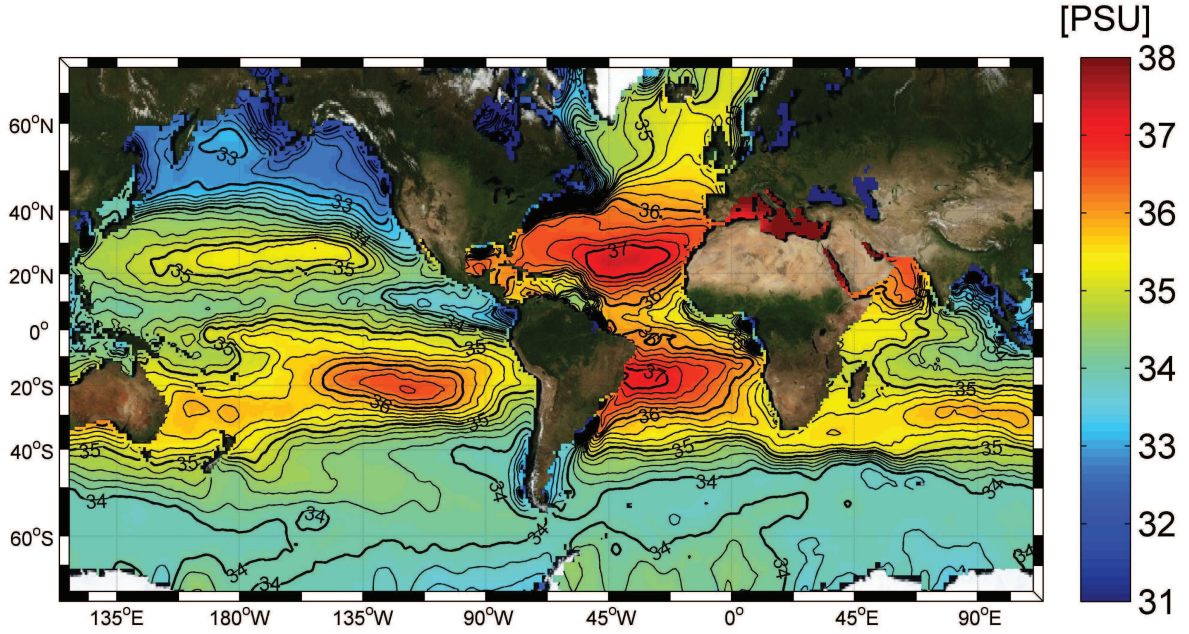


FIGURE 4.2 – Répartition de la salinité à travers le globe.

avec :

- $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m la constante diélectrique du vide.
- $w$  la pulsation de l'onde en rad/s.
- $\epsilon_s$  la permittivité statique en F/m déterminée par la relation :

$$\begin{aligned} \epsilon_s = & (87,134 - 1,949 \cdot 10^{-1} T - 1,27 \cdot 10^{-2} T^2 + 2,491 \cdot 10^{-4} T^3) \dots \\ & \times (1 + 1,613 \cdot 10^{-5} TS - 3,656 \cdot 10^{-3} S + 3,210 \cdot 10^{-5} S^2 - 4,232 \cdot 10^{-7} S^3) \end{aligned} \quad (4.2)$$

- $\sigma_s$  est la conductivité statique de la mer en  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  déterminée par la relation :

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sigma_s^0 \exp(-g(T)) \\ \sigma_s^0 &= 0,18252S - 1,4619 \cdot 10^{-6} S^2 + 2,093 \cdot 10^{-5} S^3 - 1,282 \cdot 10^{-7} S^4 \\ g(T) &= 2,033 \cdot 10^{-2} \Delta T + 1,26 \cdot 10^{-4} \Delta T^2 + 2,464 \cdot 10^{-6} \Delta T^3 \dots \\ &\quad - (1,849 \cdot 10^{-5} - 2,551 \cdot 10^{-7} \Delta T + 2,551 \cdot 10^{-8} \Delta T^2) S \\ \Delta T &= 25 - T \end{aligned} \quad (4.3)$$

- $\tau_r$  le temps de relaxation en seconde obtenu par la relation :

$$\begin{aligned} 2\pi\tau_r = & (1,1109 \cdot 10^{-9} - 3,824 \cdot 10^{-12} T + 6,938 \cdot 10^{-14} T^2 - 5,096 \cdot 10^{-16} T^3) \\ & \times (1 + 2,282 \cdot 10^{-5} ST - 7,638 \cdot 10^{-4} S - 7,760 \cdot 10^{-6} S^2 + 1,105 \cdot 10^{-8} S^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

- $\epsilon_{r,\infty}$  est la limite haute fréquence de  $\epsilon_s$  et est fixé à 4,8.

Nous représentons le comportement de la constante diélectrique pour différentes valeurs de température et de salinité en fonction de la fréquence à l'aide de la Figure 4.3. On remarque que la partie réelle de la constante diélectrique se comporte de manière différente suivant la fréquence (Figure 4.3(a)). Pour les basses fréquences, la partie réelle de la constante diélectrique est constante et proche de la permittivité statique  $\epsilon_s$ . Ensuite, on observe une zone de transition où la partie réelle de la constante diélectrique chute brutalement à la fréquence de coupure  $f_c = 1/2\pi\sqrt{3}\tau_r$ . Enfin, on remarque une zone haute fréquence où la partie réelle de la constante diélectrique est égale à la valeur limite  $\epsilon_r$ . La température a un effet non négligeable sur la



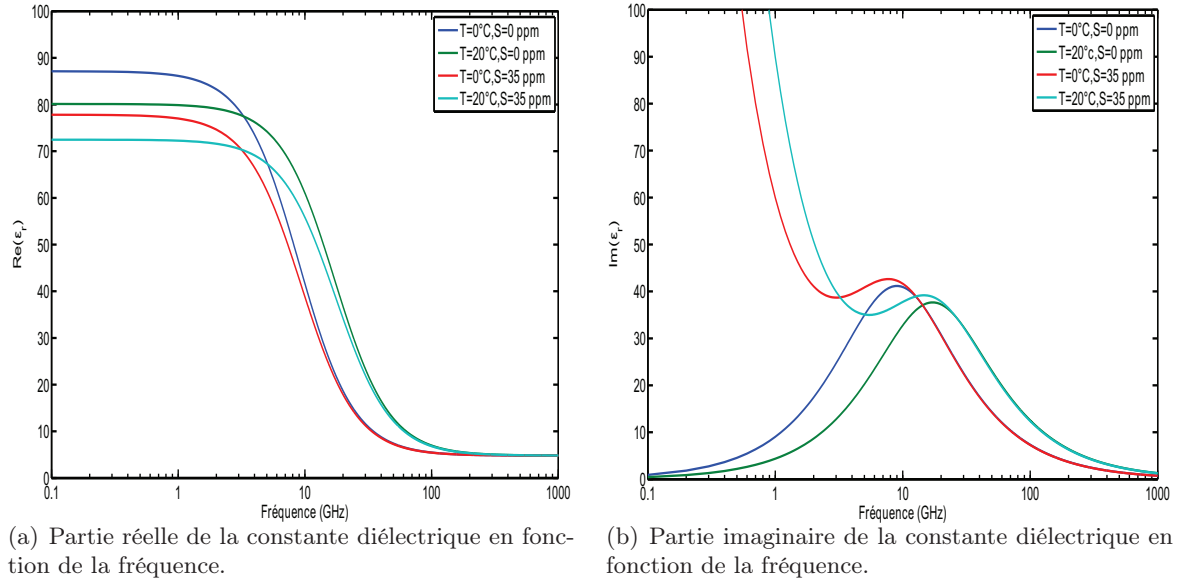


FIGURE 4.3 – Variation de la constante diélectrique en fonction de la fréquence.

permittivité diélectrique de l'eau. En effet, aux basses fréquences, la température a tendance à traduire les courbes vers l'axe des abscisses. Ce phénomène s'explique par le poids du terme de permittivité statique. Dans la zone de transition, l'augmentation de température a pour effet de déplacer la valeur de fréquences de coupure vers les hautes fréquences. En hautes fréquences, la température a une influence négligeable sur la permittivité diélectrique. Le comportement de la partie imaginaire de la permittivité diélectrique se décompose aussi en trois zones (Figure 4.3(b)). Aux basses fréquences, la partie imaginaire de la constante diélectrique diminue rapidement. Dans la zone de transition, on observe une valeur maximale dont le comportement est inversement proportionnel à la température. Aux hautes fréquences, la partie imaginaire de la constante diélectrique a tendance à diminuer.

**Le modèle de Cole-Cole** Le modèle de Cole-Cole [39,40] est un modèle empirique découlant du modèle de Debye. Il est déterminé par la relation :

$$\epsilon_r = \epsilon_{r,\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{r,\infty}}{1 + (j\omega\tau_r)^{1-\alpha_{cc}}} - j\frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_0} \quad (4.5)$$

avec  $0 \leq \alpha_{cc} \leq 1$  et vaut en règle générale 0,02.

#### 4.2.1.4 Influence du vent

L'état de mer est principalement dû au vent. Il est possible d'obtenir une relation entre vitesse et altitude à partir de la physique des écoulements des fluides. À des altitudes élevées, soit environ un à deux kilomètres au dessus du sol, l'influence de la surface de la mer sur l'écoulement du vent est pratiquement nulle. Par contre, dans les couches les plus basses, la friction contre la surface de la mer influe sur la vitesse de vent. En pratique, une rugosité forte diminue la vitesse du vent près de la surface considérée. Le vent à une altitude  $z_v$  est déterminé à partir de la vitesse de friction du vent  $U_*$  en m/s par [84] :

$$U_z = \frac{U_*}{\kappa_0} \ln \left( \frac{z_v}{z_0} \right) \quad (4.6)$$

avec :

- $\kappa_0$  la constante de Von Kármán valant 0,4.
- $z_0 = 0,684 / U_* + 0,428 U_*^2 - 0,0433$  la hauteur en cm de rugosité fonction de l'état de mer.

Ce modèle de vent suppose une vitesse de vent de friction minimale de 12 cm/s. Dans le cas contraire, le modèle doit être modifié.

Les états de mer sont classés sur l'échelle de Beaufort allant de 0 à 12 (Table 4.1 [193]). L'échelle de Beaufort porte le nom de l'Amiral britannique qui l'a inventée au début du xix<sup>ème</sup> siècle. Le but était de fournir aux chefs de quart un moyen standard d'évaluer la force moyenne du vent sur une période de 10 minutes. La "force" du vent correspondait à une configuration de la voilure des vaisseaux de l'époque. L'échelle Beaufort est reliée à la vitesse de vent par la relation [17] :

$$U_{1000} = 0,863B^{3/2} \quad (4.7)$$

B	Appellation	$U_{1000}$			Description
		Noeud	km/h	m/s	
0	Calme	0	0	0	Mer plate
1	Très légère brise	1-3	1-6	0,3-1,5	Petites ondulations
2	Légère brise	4-6	7-11	1,6-3,3	Vaguelettes ne se brisant pas
3	Petite brise	7-10	12-19	3,4-5,4	Grandes vaguelettes commençant à se briser
4	Jolie brise	11-15	20-29	5,5-7,9	Petites vagues
5	Bonne brise	16-21	30-39	8,0-10,7	Vagues modérées : un peu d'écume et d'embrun
6	Vent frais	22-27	40-50	10,8-13,8	Grandes vagues avec écume et embrun
7	Grand frais	28-33	51-62	13,9-17,1	Grosse mer avec de l'écume plus fournie
8	Coup de vent	34-40	63-75	17,2-20,7	Vagues modérément hautes se brisant avec des trainées d'écume et d'embrun
9	Fort coup de vent	41-47	76-87	20,8-24,4	Grandes vagues, écume dense et gros rouleaux
10	Tempête	48-55	88-102	24,5-28,4	Très grandes vagues, la mer devient blanche, la visibilité est réduite
11	Violente tempête	56-63	103-117	28,5-32,6	Vagues exceptionnellement grandes
12	Ouragan	>64	>117	>32,7	Vagues énormes, mer totalement blanche et visibilité très réduite

TABLE 4.1 – Lien entre l'échelle Beaufort et la vitesse du vent

On parle de "mer du vent" lorsqu'un système de vagues est créé sous l'action du vent. La nature des vagues dépend énormément de la force, de la durée et de l'étendue sur laquelle souffle le vent. Toutes ces éléments vont influencer la période, longueur d'onde et hauteur des vagues. Cette zone est appelée zone de *fetch*. Dans la zone de *fetch*, le vent n'a pas une direction et une force constante, ce qui a pour effet de créer un train de vagues se propageant dans des directions différentes. L'allure de la surface de mer est "hachée", bien que la direction moyenne de propagation de l'ensemble des trains de vagues corresponde à celle du vent. Les vagues de "mer du vent" se transforment en houle lorsque le vent faiblit ou lorsqu'elles se propagent avec une

perte d'énergie. On parle de vagues de gravité lorsque la période des vagues est comprise entre 30 et 1 seconde. On parle aussi de vagues de capillarité lorsque la période est inférieure à un dixième de seconde.

Jusque dans les années 50, les mathématiciens ont eu du mal à coupler ce phénomène d'agitation au modèle simple de la houle. Les océanographes Phillips [174] et Pierson et Moskowitz ont alors proposé une approche statistique permettant de représenter l'état de mer à partir d'un spectre.

#### 4.2.2 Propriétés géométriques de la surface de mer

Dans cette partie, nous présentons le moyen de générer une surface rugueuse. De manière générale, les surfaces rugueuses peuvent avoir la propriété d'être périodique (créniaux, dents de scie ou sinusoïdales) ou aléatoire. Nous nous intéressons au cas de surfaces rugueuses aléatoires. La difficulté de description de ces surfaces réside dans le fait qu'il est difficile de disposer d'une expression mathématique unique. En effet, une surface de mer considérée comme rugueuse et aléatoire peut être décrite par une superposition de vagues de longueur d'onde, de hauteur et de direction de propagation différentes (Figure 4.4). Par contre, il est possible de connaître différentes caractéristiques statistiques. Les surfaces rugueuses aléatoires sont en fait des processus stochastiques, c'est-à-dire que le processus aléatoire dépend du temps. Nous présentons par la suite deux approches permettant de décrire la surface rugueuse :

- la distribution des pentes (*cf.* section 4.2.2.3).
- le spectre de mer (*cf.* section 4.2.2.5.c).

Mais avant d'exposer ces deux approches, il est nécessaire de fournir quelques définitions ainsi que les hypothèses générales de travail.

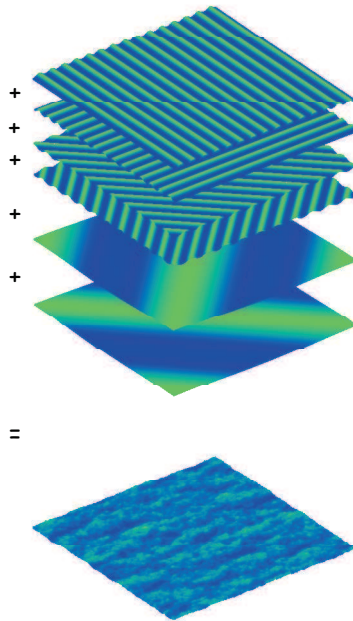


FIGURE 4.4 – Décomposition d'une surface maritime à partir de surfaces sinusoïdales indépendantes.

#### 4.2.2.1 Surface de mer à une dimension

Nous considérons un repère orthogonal  $(O, x, y, z)$  tel que le plan moyen de la surface de mer soit décrit par le plan d'équation  $z = 0$  (Figure 4.5). La profondeur  $d_p$  correspond à la distance verticale entre le fond et le niveau moyen de la mer. La variation de l'état de mer en fonction du temps est déterminée par la variable d'élévation  $z$  par rapport à une surface de référence. Cette variable dépend des variables spatiales  $x$  et  $y$  ainsi que du temps  $t$ . La variable d'élévation se note alors  $z(x, y, t)$  ou  $z(\mathbf{r}, t)$ . La grandeur  $H_c$  correspond à la taille des vagues et correspond à la distance verticale entre un creux et une crête sur une période  $T_c$ , temps séparant deux passages successifs dans le même sens par le niveau moyen.

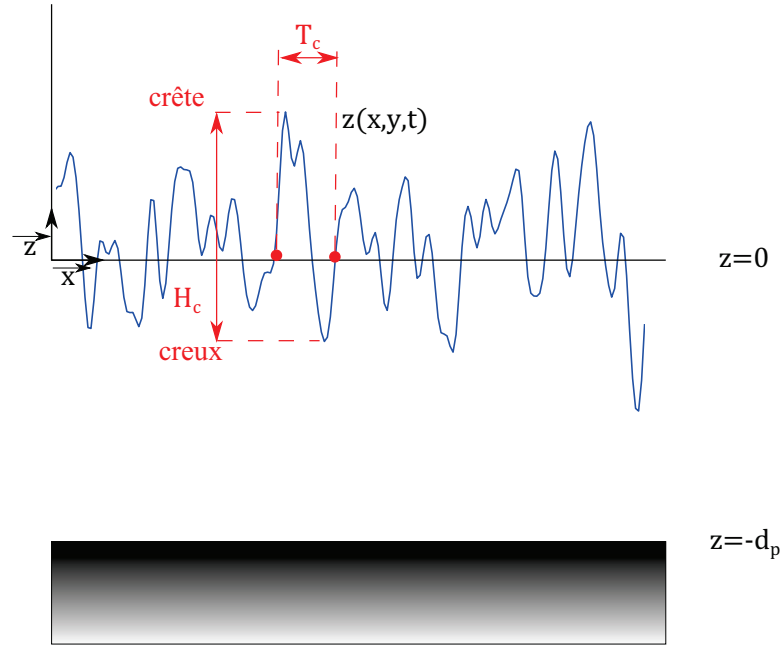


FIGURE 4.5 – Définition de la taille des vagues.

#### 4.2.2.2 Distribution des hauteurs

On utilise souvent la grandeur appelée hauteur significative  $H_{1/3}$  introduite par Sverdrup et Munk [212] afin de caractériser la hauteur des vagues. Il s'agit de la moyenne des hauteurs (mesurées entre crête et creux) du tiers des plus fortes vagues (Figure 4.6). Il existe une autre définition de la hauteur significative. Des mesures expérimentales ont permis d'établir que la distribution des hauteurs de vagues suit une loi de Rayleigh de paramètre  $\sigma_{\mathcal{R}}$  ([138, 228]). La hauteur significative, notée  $H_{m0}$ , vaut :

$$H_{m0} = 4\sigma_{\mathcal{R}} \quad (4.8)$$

En pratique, on utilise la deuxième définition car elle est plus facile à mesurer.

On rattache souvent la hauteur de vague à l'échelle de Beaufort. Dans la littérature, des modèles ont été proposés permettant de caractériser la hauteur significative à partir du *fetch* et de la vitesse de vent. Par exemple, le modèle de Sverdrup, Munk et Bretschneider [29, 212] et le modèle Shore Protection Manual [6] permettent de calculer la hauteur de vague à partir de la vitesse de vent et du *fetch* grâce à des abaques.

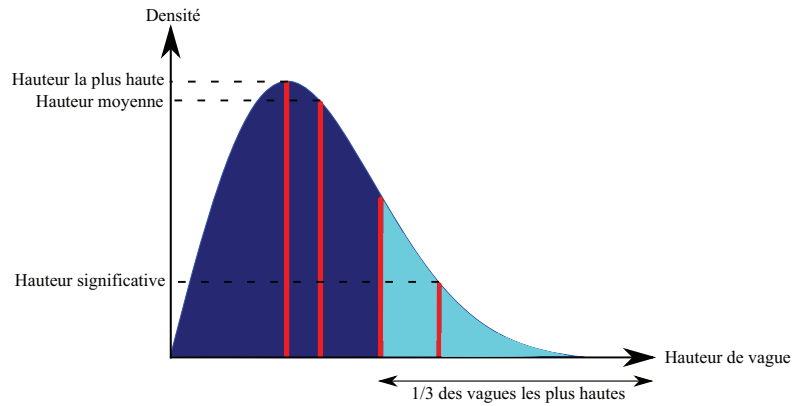


FIGURE 4.6 – Définition de la hauteur significative par Sverdrup et Munk.

### 4.2.2.3 Distributions des pentes

**Distribution Gaussienne** La densité de probabilité Gaussienne est le modèle le plus simple permettant de modéliser la surface de mer :

$$P_Z(z_c, z_u) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_c\sigma_u}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_c^2}{\sigma_c^2} + \frac{z_u^2}{\sigma_u^2}\right)\right) \quad (4.9)$$

Il s'exprime en fonction de la pente de la fonction d'élévation dans la direction du vent (*upwind*), notée  $z_u$ , et de la pente de la fonction d'élévation dans la direction travers au vent (*crosswind*), notée  $z_c$  ainsi que de la variance des pentes dans la direction du vent, notée  $\sigma_u^2$  et de la variance dans la direction travers au vent, notée  $\sigma_c^2$ . Ces deux valeurs ont été déterminées par Cox et Munk [44] à partir de mesures photographiques du scintillement du soleil sur la mer :

$$\sigma_u^2 = 0,005 + 0,78 \cdot 10^{-3} U_{1250} \quad \text{et} \quad \sigma_c^2 = 0,003 + 0,84 \cdot 10^{-3} U_{1250} \quad (4.10)$$

En réalité, on constate que la houle n'est pas symétrique s'accroissant lorsque la vitesse du vent augmente. Cox et Munk proposent de corriger ce phénomène en proposant leur propre modèle.

**Distribution de Cox et Munk** Cox et Munk [44, 45] ont proposé un modèle empirique permettant de représenter la distribution des pentes des vagues. Ce modèle a été établi à partir de photographies aériennes permettant d'observer la réflexion spéculaire du soleil. La distribution de Cox et Munk est déterminée par une distribution Gaussienne pondérée par une distribution de Gram-Charlier.

$$P_Z(z_c, z_u) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_u\sigma_c}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_c^2}{\sigma_c^2} + \frac{z_u^2}{\sigma_u^2}\right)\right) F(z_c, z_u) \quad (4.11)$$

avec

$$F(z_c, z_u) = 1 + \frac{c_{21}}{2} \left(\frac{z_c^2}{\sigma_c^2} - 1\right) \frac{z_u}{\sigma_u} - \frac{c_{03}}{6} \left(\frac{z_c^3}{\sigma_c^3} - 3\frac{z_c}{\sigma_c}\right) + \frac{c_{40}}{24} \left(\frac{z_u^4}{\sigma_u^4} - 6\frac{z_u^2}{\sigma_u^2} + 3\right) + \frac{C_{22}}{4} \left(\frac{z_c^2}{\sigma_c^2} - 1\right) \left(\frac{z_u^2}{\sigma_u^2} - 1\right) + \frac{c_{04}}{24} \left(\frac{z_u^4}{\sigma_u^4} - 6\frac{z_u^2}{\sigma_u^2} + 3\right) \quad (4.12)$$

Les coefficients  $c_{40}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{04}$ ,  $c_{21}$  et  $c_{03}$  dépendent de la vitesse du vent à l'altitude 1250 cm (soit 41 pieds)  $U_{1250}$ .

$$\begin{aligned} c_{21} &= 0,01 - 0,0086 U_{1250} & c_{22} &= 0,12 & c_{40} &= 0,4 \\ c_{03} &= 0,04 - 0,033 U_{1250} & c_{04} &= 0,23 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les écarts-types des pentes  $\sigma_u$  et  $\sigma_c$  ont été déterminés à partir de mesures sur une mer “propre”, c’est à dire que l’on considère uniquement les vagues de capillarité :

$$\sigma_u^2 = 3,16 \cdot 10^{-3} U_{1250} \quad \text{et} \quad \sigma_c^2 = 0,003 + 1,92 \cdot 10^{-3} U_{1250} \quad (4.14)$$

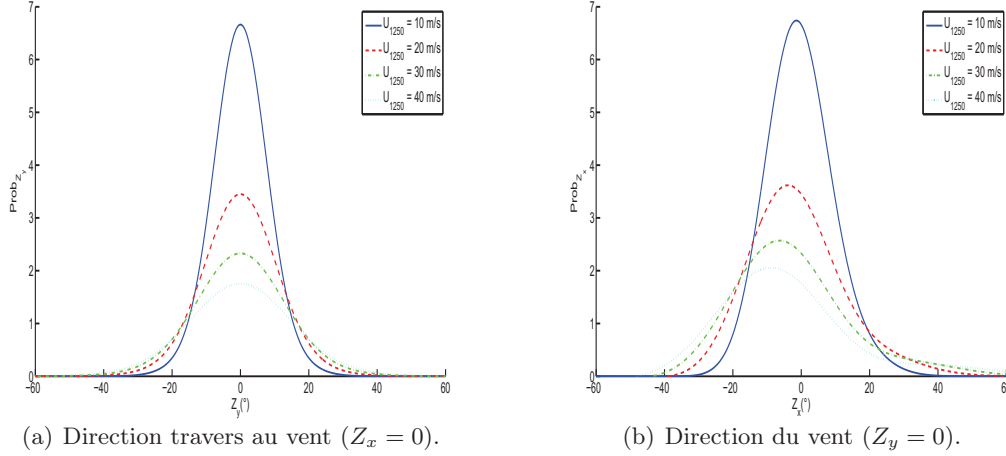


FIGURE 4.7 – Distributions des pentes de Cox et Munk pour différentes vitesses de vent.

Les figures 4.7(a) et 4.7(b) représentent la distribution des pentes de la fonction élévation dans la direction du vent et dans la direction transverse pour des vents de friction 10, 20, 30 et 40 m/s. On remarque que la distribution des pentes de la fonction élévation est symétrique dans la direction travers au vent et asymétrique dans la direction du vent.

Le problème est que la distribution des hauteurs ne permet pas de caractériser totalement la surface rugueuse. Il est nécessaire de faire intervenir la fonction d’auto-corrélation.

#### 4.2.2.4 Fonction d’auto-corrélation

La fonction d’auto-corrélation va permettre de mesurer les profils répétés dans la surface rugueuse. Elle est définie par :

$$\rho(x) = \frac{\langle z(r)z(r+x) \rangle}{\sigma_z^2} \quad (4.15)$$

avec  $\sigma_z$  l’écart-type des hauteurs. On remarque que lorsque  $x = 0$ , la valeur de la fonction d’auto-corrélation vaut 1. Classiquement, on choisit une fonction d’auto-corrélation des hauteurs de la surface de type Gaussien [33].

$$\rho(x) = \sigma_z^2 \exp \left( - \left( \frac{x}{L_c} \right)^2 \right) \quad (4.16)$$

avec  $L_c$  représentant la longueur de corrélation. Elle correspond à la distance  $x$  entre deux points de la surface pour lesquels leur coefficient de corrélation vaut  $\frac{1}{e}$ .

#### 4.2.2.5 Modélisation spectrale

##### 4.2.2.5.a Relation de dispersion

La relation de dispersion pour des vagues de gravité est définie par la relation [92] :

$$w^2 = g_0 k \tanh(kd_c) \quad (4.17)$$

avec  $d_c$  représentant la profondeur,  $k$  le nombre d'onde des vagues (rad/m) et  $g_0$  l'accélération de la pesanteur ( $\text{m/s}^2$ ). Par la suite, nous supposons une profondeur infinie ce qui permet d'approximer  $w^2 = g_0 k$  et donc une vitesse de phase  $c(k) = \sqrt{g_0/k}$ .

La relation de dispersion prenant en compte les phénomènes de gravité et de capillarité [92, 118] est :

$$w^2 = g_0 k + \frac{\tau}{\rho_{eau}} k^3 \quad (4.18)$$

avec  $g_0 k$  la composante de vagues de gravité et  $(\tau/\rho_{eau})k^3$  la composante des vagues de capillarité,  $\rho_{eau} = 10^3 \text{kg/m}^3$  étant la masse volumique et  $\tau = 7410^{-3} \text{N/m}$  la tension superficielle de la surface de l'eau. La vitesse de phase d'une vague de nombre d'onde  $k$  peut se mettre sous la forme :

$$c(k) = \sqrt{\frac{g_0}{k} \left( 1 + \left( \frac{k}{k_m} \right)^2 \right)} \quad (4.19)$$

en posant  $k_m^2 = g_0 \rho / \tau$  avec  $k_m$  le nombre d'onde du pic gravité-capillarité.

#### 4.2.2.5.b Lien entre la fonction d'élévation et spectre de mer

La variable d'élévation de la surface de mer obéit à l'équation de Navier-Stokes. Le problème avec cette équation est qu'elle présente des termes non linéaires. Il est possible de s'affranchir de ce problème en supposant que le rapport entre l'élévation et la longueur d'onde pour la vague dominante (ou pente de surface) doit être faible. La structure de la surface de mer se décompose alors comme une somme infinie et continue de composantes oscillantes indépendantes. L'élévation de la surface de la mer se traduit mathématiquement par :

$$z(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\mathbf{k}) \exp(j\phi(\mathbf{k})) \exp(j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)) d\mathbf{k} \quad (4.20)$$

avec  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde,  $\phi(\mathbf{k})$  un terme de phase aléatoire et  $\xi(\mathbf{k})$  les coefficients de Fourier. Le spectre de vague  $\Psi(\mathbf{k}, w)$  s'obtient par la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction d'autocorrélation de l'élévation de surface :

$$\Psi(\mathbf{k}, w) = (2\pi)^{-3} \int \rho(\mathbf{R}, t) \exp(-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - wt)) d\mathbf{R} dt \quad (4.21)$$

Il est alors possible de définir le spectre de nombre d'onde en s'affranchissant de la pulsation  $w$  :

$$\Psi(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\mathbf{k}, w) dw \quad (4.22)$$

En supposant que la mer est créée par le vent au lieu et à l'heure de l'observation (mer de vent), le spectre admet des symétries par rapport à la direction de propagation du vent qui a généré les vagues. Ce spectre peut alors être exprimé en notation polaire par  $\Psi(k, \phi)$  avec  $k$  la norme du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et  $\phi$  l'angle séparant la direction de propagation des vagues de la direction du vecteur vent. La modélisation du spectre se détermine à partir d'un spectre omnidirectionnel  $S(k)$  (composante moyenne du spectre dans toutes les directions) couplé à une fonction de répartition angulaire  $D(k, \phi)$  :

$$\Psi(k, \phi) = \frac{1}{k} S(k) D(k, \phi) \quad (4.23)$$

Il existe plusieurs spectres omnidirectionnel  $S(k)$  permettant de caractériser une mer "pleinement" développée (définie en section 4.2.2.5.c) : les vagues sont supposées être à l'équilibre, c'est-à-dire que le spectre ne dépend que du vent. Par conséquent, nous présentons une liste non exhaustive de spectres utilisés pour générer une surface maritime réelle.

#### 4.2.2.5.c Les spectres omnidirectionnels

Le concept de spectre pour les vagues a été introduit par Neumann [159]. Les travaux de thèses effectuées au sein de l'équipe Radar, Électromagnétisme et Télédétection permet de visualiser un large panel de spectres électromagnétiques [7, 11]. Il est possible aussi d'aller consulter la thèse d'Elfouhaily [70] où un historique détaillé des spectres est réalisé.

**Le spectre Gaussien** On le retrouve souvent dans la littérature. Dans le cas unidimensionnel, le spectre est obtenu par la fonction d'auto-corrélation définie par l'équation (4.16) :

$$\rho(x) = \sigma_z^2 \exp\left(-\frac{x^2}{L_c^2}\right) \xrightarrow{T.F.} S_G(k) = \sigma_z^2 \frac{L_c}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{L_c^2 k^2}{4}\right) \quad (4.24)$$

*Remarque 4.2.1.* Pour des soucis de représentation ou de calculs, l'équation (4.24) peut s'écrire de plusieurs façons :

$$S_G(k) = \sigma_z^2 \frac{L_c^2}{2} \exp\left(-\frac{L_c^2 k^2}{4}\right) \quad \text{ou} \quad S_G(k) = \sigma_z^2 \sqrt{\pi} L_c \exp\left(-\frac{L_c^2 k^2}{4}\right) \quad (4.25)$$

Cependant, ce modèle n'est pas utilisé pour caractériser une surface réelle car il est trop simpliste.

**Le spectre de Pierson et Moskowitz** Pierson et Moskowitz [176] ont développé en 1964 un modèle empirique permettant de modéliser le comportement aléatoire d'une surface maritime. Cette méthode suppose que si le vent souffle de manière constante sur une large surface, alors les vagues et le vent vont être en "équilibre". Ce modèle est utilisé pour représenter une mer développée (qu'on retrouve notamment en Atlantique Nord). Le spectre s'exprime à partir de la pulsation par [176] :

$$S_{PM}(w) = \frac{\alpha_{PM} g_0^2}{w^5} \exp\left(-\beta_{PM} \left(\frac{w_p}{w}\right)^4\right) \quad (4.26)$$

avec :

- $\alpha_{PM}$  représentant la constante de Philips et qui vaut  $8,1 \cdot 10^{-3}$ .
- $\beta_{PM}$  est déterminé expérimentalement et vaut 0,74.
- $w_p = g_0/U_{1950}$  la pulsation de la houle au maximum du spectre.

L'équation (4.26) peut aussi s'exprimer à partir du nombre d'onde :

$$S_{PM}(k) = \frac{\alpha_{PM}}{2k^3} \exp\left(-\beta_{PM} \left(\frac{k_p}{k}\right)^2\right) \quad (4.27)$$

avec  $k_p = g_0/U_{1950}^2$  représentant le nombre d'onde du pic central.

La représentation du spectre en fonction du nombre d'onde est donnée en Figure 4.8. On remarque que ce spectre dépend de la vitesse du vent et par conséquent ce spectre est plus fidèle à la réalité quand on le compare au spectre gaussien. Le problème avec ce spectre est qu'il est utilisé pour représenter la houle et non pour représenter les vagues de capillarité.

**Le spectre de JONSWAP (Joint North Sea Wave Project)** Le modèle est fondé sur les mesures expérimentales réalisées en mer du Nord par Hasselman *et al.* [100]. L'originalité du projet était d'observer la croissance des vagues sous des conditions limites de *fetch*, notamment la transformation des vagues à l'état de mer vers une zone d'eau peu profonde. Les mesures de



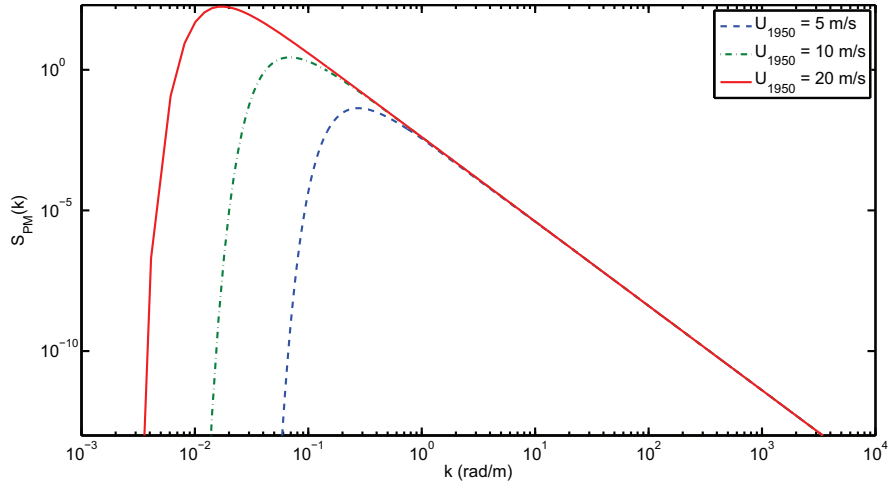


FIGURE 4.8 – Spectre de Pierson Moskowitz

vagues et de vent on été réalisées sur une ligne de 160 km à l'ouest de l'île de Sylt en Allemagne. Le spectre de JONSWAP est déterminé par la relation :

$$S_{JW}(k) = \frac{\alpha_{JW}}{2k^3} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{k_p}{k}\right)^2\right) 3.3 \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1\right)^2}{2\delta_{JW}^2}\right) \quad (4.28)$$

avec :

$$\delta_{JW} = \begin{cases} 0,07 & \text{si } k \leq k_p \\ 0,09 & \text{si } k > k_p \end{cases} \quad (4.29)$$

$$k_p = 0,769g_0/U_{1950}^2 \quad (4.30)$$

$$\alpha_{JW} = 0,076\bar{X}^{-0,22} \quad \text{où } \bar{X} = \frac{g_0 X_f}{U_{1000}^2} \quad (4.31)$$

avec  $X_f$  le fetch en mètre.

Les simulations de la Figure 4.9 sont réalisées à partir d'un *fetch* infini, ce qui permet d'obtenir une modulation du spectre de Pierson-Moskowitz.

**Le spectre de Fung et Lee** Fung et Lee [84] construisent leur spectre suivant la nature des vagues (gravité et capillarité). Le spectre est alors défini sur deux intervalles :

$$S_{FL}(k) = \begin{cases} S_{FL,\text{gravité}} & \text{si } k \leq 4 \text{ rad/m} \\ S_{FL,\text{capillarité}} & \text{si } k > 4 \text{ rad/m} \end{cases} \quad (4.32)$$

Le spectre de gravité correspond à un spectre de Pierson et Moskowitz modifié défini par [84] :

$$S_{FL,\text{gravité}}(k) = \frac{\alpha_{FL}}{2k^3} \exp\left(-\beta_{PM} \left(\frac{k_p}{k}\right)^2\right) \quad (4.33)$$

avec  $\alpha_{FL} = 2,8 \cdot 10^{-3}$ .

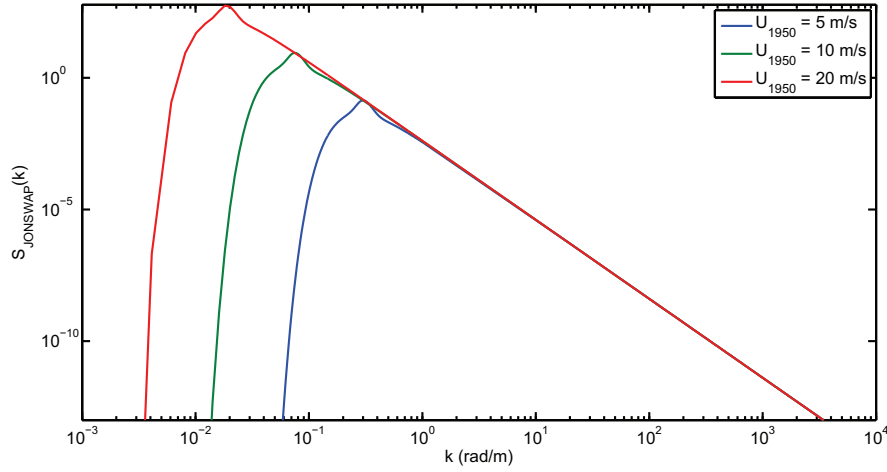


FIGURE 4.9 – Spectre de JONSWAP.

Le spectre de capillarité correspond à un spectre de Philips défini par [84] :

$$S_{FL, \text{capillarité}} = a_0 \left(1 + 3 \frac{k^2}{k_m^2}\right) \left[k \left(1 + \frac{k^2}{k_m^2}\right)\right]^{-\frac{p_{FL}+1}{2}} \quad (4.34)$$

avec :

$$a_0 = 0,875 \cdot 10^{-4} (2\pi)^{p_{FL}-1} g_0^{\frac{1-p_{FL}}{2}} \quad (4.35)$$

$$p_{FL} = \log_{10}(U_*) \quad (4.36)$$

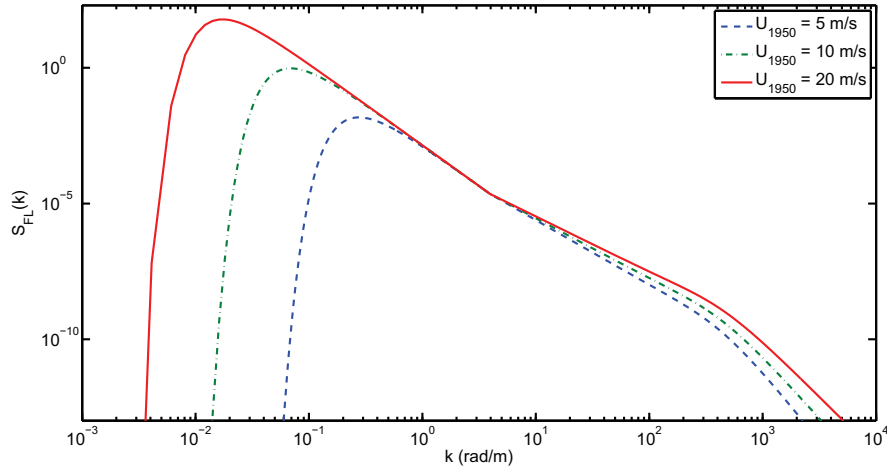


FIGURE 4.10 – Spectre de Fung et Lee.

Le problème avec ce spectre est qu'il est défini sur deux supports ce qui lui confère une certaine discontinuité (Figure 4.10). Le spectre proposé par Elfouhaily *et al.* [69,70] permet d'éviter cette contrainte et présente l'avantage d'être applicable à des mers pleinement développées.

**Le spectre d'Elfouhaily** Le spectre d'Elfouhaily est une synthèse de différents travaux réalisés depuis les années 70. Ce modèle permet notamment de prendre en compte le modèle de Cox

et Munk pour les pentes ainsi que la notion de *fetch*. Le spectre d'Elfouhaily *et al.* [69,70]  $S_{ELF}$  se décompose en une somme d'un spectre dépendant des vagues de capillarité  $S_c$  et un spectre dépendant des vagues de gravité  $S_g$ . Le spectre des vagues de gravité, correspondant aux basses fréquences, est donné par :

$$S_c(k) = \frac{1}{2k^3} \frac{c_m}{c(k)} \alpha_m \exp \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{k}{k_m} - 1 \right)^2 \right) \quad (4.37)$$

avec :

- $c_m = \sqrt{2g_0/k_m} = 0,23$  m/s la vitesse de phase du pic gravité-capillarité.
- $\alpha_m$  le paramètre d'équilibre de Philips-Kitaigorodskii défini par :

$$\alpha_m = \begin{cases} (1 + \ln(U_*/c_m))10^{-2} & \text{si } U_* < c_m \\ (1 + 3 \ln(U_*/c_m))10^{-2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.38)$$

- $\Omega_0 = 0,84 \left( \tanh(g_0 X_f / (U_{10}^2 2, 2 \cdot 10^4))^{0,4} \right)^{-0,75}$  correspond à l'inverse de l'âge des vagues et caractérise l'état de développement de la mer de vent. Une mer sera dite jeune lorsque  $\Omega_0 \geq 2$ , mature pour  $\Omega_0 \approx 1$  et pleinement développée pour  $\Omega_0 = 0,84$ . La valeur  $X_f$  correspond au fetch en mètre.

Le spectre des vagues de capillarité, correspondant aux hautes fréquences, s'exprime par :

$$S_g(k) = \frac{1}{2k^3} \alpha_p \frac{c_p}{c(k)} L_{PM} \gamma_{JW}^{r_{JW}} \exp \left( -\frac{\Omega_0}{\sqrt{10}} \left( \sqrt{\frac{k}{k_m}} - 1 \right) \right) \quad (4.39)$$

- $c_p = \frac{U_{1000}}{\Omega_0}$  la vitesse de phase des vagues de longueurs d'ondes du pic basses fréquences du spectre.
- $L_{PM}$  est le spectre de forme de Pierson :

$$L_{PM} = \exp \left( -\frac{5}{4} \left( \frac{k_p}{k} \right)^2 \right) \quad (4.40)$$

- Le coefficient  $\gamma_{JW}$  est calculé par :

$$\gamma_{JW} = \begin{cases} 1,7 & \text{si } 0,84 < \Omega_0 < 1 \\ 1,7 + 6 \log \Omega_0 & \text{si } 1 \leq \Omega_0 < 5 \end{cases} \quad (4.41)$$

- Le coefficient  $r_{JW}$  est défini par :

$$r_{JW} = \exp \left( -\frac{\left( \sqrt{\frac{k}{k_p}} - 1 \right)^2}{2\sigma_{JW}^2} \right) \quad (4.42)$$

- Le coefficient  $\sigma_{JW}$  vaut :

$$\sigma_{JW} = 0,08(1 + 4\Omega_0^{-3}) \quad (4.43)$$

*Remarque 4.2.2.* Nous avons utilisé les formules décrites dans [69,70] afin de générer une surface de mer. Cependant, sous réserve d'erreurs de programmation de notre part, les courbes obtenues

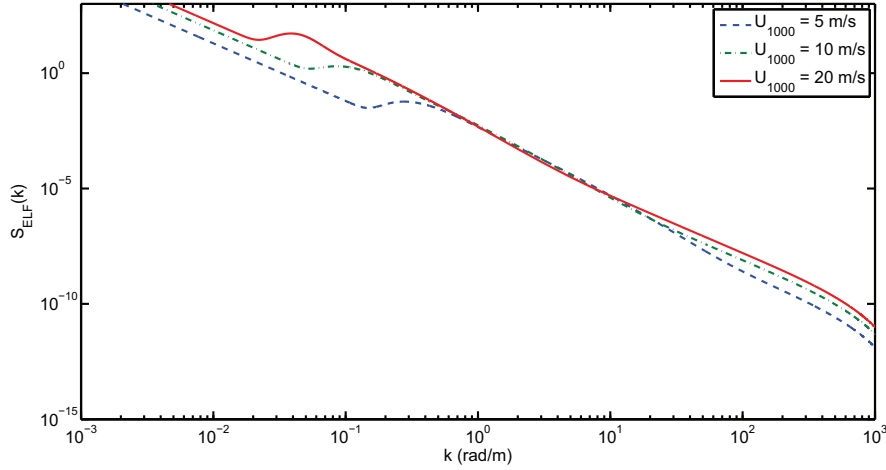


FIGURE 4.11 – Spectre d'Elfouhaily (version [69, 70]).

en Figure 4.11 ne sont pas en accord avec celles obtenues dans les différentes publications d'Elfouhaily. Nous avons trouvé dans la littérature [27, 139, 206] une autre expression pour le spectre des vagues de gravité :

$$S_c(k) = \frac{1}{2k^3} \frac{c_m}{c(k)} \alpha_m L_{PM} \gamma_{JW}^{rJW} \exp \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{k}{k_m} - 1 \right)^2 \right) \quad (4.44)$$

Nous pensons qu'il y a un facteur correctif dans l'expression du spectre des vagues de gravité qui a du être oublié. Les courbes obtenues en Figure 4.12 sont en accord avec [69, 70]. Par la suite, nous utilisons le spectre d'Elfouhaily corrigé car ce spectre permet de prendre en compte simultanément les phénomènes de vagues de gravité, de vagues de capillarité et la notion de *fetch* comparé aux autres spectres présentés dans cette section (Table 4.2).

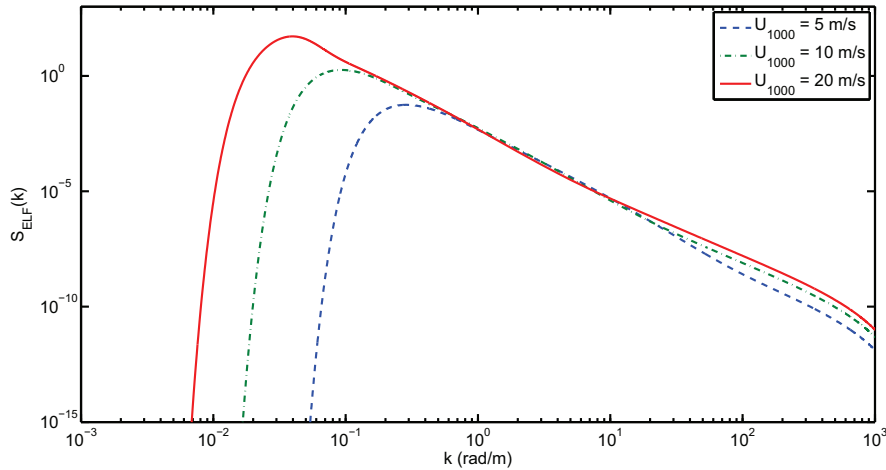


FIGURE 4.12 – Spectre obtenu avec la version corrigée du spectre d'Elfouhaily.

#### 4.2.2.5.d Les fonctions angulaires

Les spectres omnidirectionnels donnent ainsi une description monodimensionnelle de la propagation des vagues. Pour rendre le spectre bidimensionnel, il est nécessaire de multiplier le

Spectres	Vagues de gravité	Vagues de capillarité	Fetch
Pierson-Moskowitz	✓	✗	✗
JONSWAP	✓	✗	✓
Fung-Lee	✓	✓	✗
Elfouhaily <i>et al.</i>	✓	✓	✓

TABLE 4.2 – Récapitulatif des caractéristiques des différents spectres.

spectre omnidirectionnel par une fonction angulaire permettant ainsi de propager chaque raie du spectre dans un faisceau angulaire. La fonction angulaire traduit la façon dont l'énergie est répartie angulairement pour chaque fréquence. Le spectre directionnel doit présenter une symétrie par rapport à la direction de propagation du vent. Dans [69], les auteurs ont démontré que le spectre directionnel pouvant s'écrire sous la forme :

$$D(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} (1 + \Delta(k) \cos(2\phi)) \quad (4.45)$$

Elfouhaily *et al.* ont prouvé que la quantité  $\Delta(k)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta(k) = \tanh(f_1(k_p/k)) \quad (4.46)$$

avec  $f_1$  une fonction dépendant du rapport  $k_p/k$ .

Dans la suite, nous présentons une liste non-exhaustive de fonctions angulaires présentes dans la littérature.

**La fonction  $\cos^2$**  La fonction angulaire est indépendante du nombre d'onde et est déterminée par :

$$D(\phi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2(\phi - \phi_0) & \text{si } \phi \in [-\pi/2 + \phi_0; \pi/2 + \phi_0] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.47)$$

avec  $\phi_0$  la direction moyenne des vagues.

**Le spectre de Fung et Lee** Il est nécessaire de multiplier le spectre de Fung et Lee par une fonction angulaire afin de prendre en compte l'influence du vent [84] :

$$D(k, \phi) = a_0 + a_1(1 - \exp(-bk^2)) \cos(2\phi) \quad (4.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(1-R)/(1+R)}{\pi(1-B)}; & R &= \frac{0,0003+1,92 \cdot 10^{-3} U_{12,5}}{3,16 \cdot 10^{-3} U_{12,5}}; & a_0 &= \frac{1}{2\pi}; \\ B &= \frac{1}{\sigma_t^2} \int_0^{+\infty} k^2 S_{FL}(k) \exp(-bk^2) dk; & \sigma_t^2 &= \int_0^{+\infty} k^2 S_{FL}(k) dk; & b &= 1,4 \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

**Le spectre de Mitsuyasu** Mitsuyasu *et al.* ont repris et modifié le spectre de Longuet et Higgins. La fonction angulaire de Mitsuyasu *et al.* peut s'écrire sous la forme [156] :

$$D(k, \phi) = \frac{2^{s-1}}{\pi} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cos^{2s} \left( \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \quad (4.50)$$

avec  $\Gamma(s)$  représentant la fonction Gamma et le paramètre  $s$  contrôle la distribution angulaire de l'énergie suivant la fréquence :

$$s = \begin{cases} s_p((c(k)k)/(c_p k_p))^{-2,5} & \text{si } k \geq k_p \\ s_p((c(k)k)/(c_p k_p))^5 & \text{si } k < k_p \end{cases} \quad (4.51)$$

avec  $s_p$  la valeur de  $s$  prise à la fréquence  $f_p$  du pic spectral :

$$s_p = 11.5 \left( \frac{U_{10}}{c_p} \right)^{-2,5} \quad (4.52)$$

**La fonction angulaire d'Hasselmann** Hasselman *et al.* reprennent également le spectre de Longuet et Higgins. La fonction d'Hasselmann *et al.* est déterminée par l'expression [99] :

$$D(k, \phi) = \frac{2^{s-1}}{\pi} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \cos^{2s} \left( \frac{\phi - \phi_0}{2} \right) \quad (4.53)$$

avec  $\Gamma(s)$  représentant la fonction Gamma et le paramètre  $s$  contrôle la distribution angulaire de l'énergie suivant la fréquence :

$$s = \begin{cases} 9,77((c(k)k)/(c_p k_p))^{(-2,3-1,45(U_{10}/c_p-1,17))} & \text{si } k \geq 1,05k_p \\ 6,97((c(k)k)/(c_p k_p))^{4,06} & \text{si } k < 1,05k_p \end{cases} \quad (4.54)$$

Le paramètre de normalisation est égal à :

$$N_p = 2^{1-2p} \pi \frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma^2 p + 1} \quad (4.55)$$

**Le spectre d'Elfouhaily** Elfouhaily *et al.* proposent la fonction angulaire suivante [69] :

$$D(k, \phi) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \tanh \left( a_0 + a_p \left( \frac{c(k)}{c_p} \right)^{2,5} + a_m \left( \frac{c_m}{c(k)} \right)^{2,5} \right) \cos(2\phi) \right) \quad (4.56)$$

avec  $a_0 = 0,1733$ ,  $a_p = 4$  et  $a_m = 0,13U_*/c_m$ .

Nous représentons la fonction angulaire d'Elfouhaily pour plusieurs vitesses de vent (Figure 4.13).

### 4.2.3 Spectre de mer et vagues

La décomposition des vagues suivant différentes fréquences est analogue à la lumière. En effet, la lumière est constituée de différentes fréquences qui se distinguent chacune par une couleur. Généralement, le spectre de mer est représenté à partir d'une décomposition en de différentes longueurs d'ondes. La méthode spectrale pour générer des vagues a été développée en infographie. Mastin [146] étend les travaux d'Hasselmann pour étendre le spectre théorique de Pierson et Moskowitz de 1 à 2 dimensions. L'élévation est obtenue alors par une transformée de Fourier inverse. Il utilise un bruit blanc uniforme. Cette démarche a notamment été programmée en Matlab<sup>2</sup>. Le problème avec ce code est que l'auteur utilise la méthode introduite par les infographistes : il normalise la hauteur des vagues entre -1 et 1 puis recalcule la hauteur de vagues à partir de l'échelle de Beaufort alors qu'en réalité la hauteur de vagues est déjà comprise dans l'expression des spectres.

2. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/24884-sea-surface>

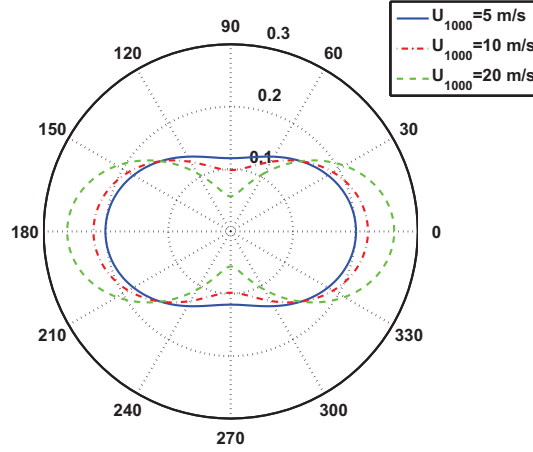


FIGURE 4.13 – Fonction angulaire d’Elfouhaily en fonction de la vitesse de vent.

Pour notre surface de mer, nous avons utilisé un bruit blanc Gaussien dans le cas à 1 et 2 dimensions ([134, 214]) (Figure 4.14(c)). La forme de la surface de longueur  $L_x \times L_y$ , tels que  $L_x = N\Delta x$  et  $L_y = M\Delta y$ , dépend de plusieurs nombres d’onde  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  avec  $k_x = [-2\pi/2L : 2\pi/2L]$  la composante suivant  $x$  et  $k_y = [-2\pi/2M : 2\pi/2M]$  la composante suivante  $y$ . Pour une vitesse de vent donnée et une surface de taille donnée, on obtient un spectre à 2 dimensions en fonction du nombre d’onde. Par exemple, pour une surface de  $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$  avec une vitesse du vent de  $5 \text{ m/s}$ , nous remarquons sur la Figure 4.14(a) que le spectre ne dépend que de certaines longueurs d’ondes. L’ajout de la fonction angulaire pour un vent de direction  $\phi = 0^\circ$  va permettre d’obtenir une symétrie du spectre par rapport à l’axe de propagation du vent 4.14(b). Pour obtenir un aspect aléatoire de la surface maritime, le spectre va ensuite être bruité (Figure 4.14(d)). La nature aléatoire de la surface maritime est obtenue en appliquant un filtre de réponse impulsionnelle de densité spectrale de puissance sur un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité. Si on considère une surface maritime à une dimension, la relation du filtre est donnée par :

$$z(i) = g(i) * e(i) \quad (4.57)$$

Dans le cas d’une surface maritime à 2 dimensions, l’élévation de la surface est définie au point  $x_n = n\Delta x$  et  $y_m = m\Delta y$  par la relation [134] :

$$\zeta(x_n, y_m) = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{i=-N/2}^{i=N/2-1} \sum_{u=-M/2}^{u=M/2-1} F(K_i, K_u) e^{j(K_i x_n + K_u y_m)} \quad (4.58)$$

avec :

$$F(K_i, K_u) = 2\pi \left[ L_x L_y S \left( \sqrt{K_i^2 + K_u^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} G_{1,u} G_{2,u,i} \quad (4.59)$$

Il faut prendre deux bruits car on a deux directions de propagation. Les différents bruits sont définis par :  $\forall u$ , si  $i \geq 0$

$$G_{1,u} = \begin{cases} \mathcal{N}(0, 1) & \text{si } i = 0 \\ 1/\sqrt{2}(\mathcal{N}(0, 1) + j\mathcal{N}(0, 1)) & \text{si } i > 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

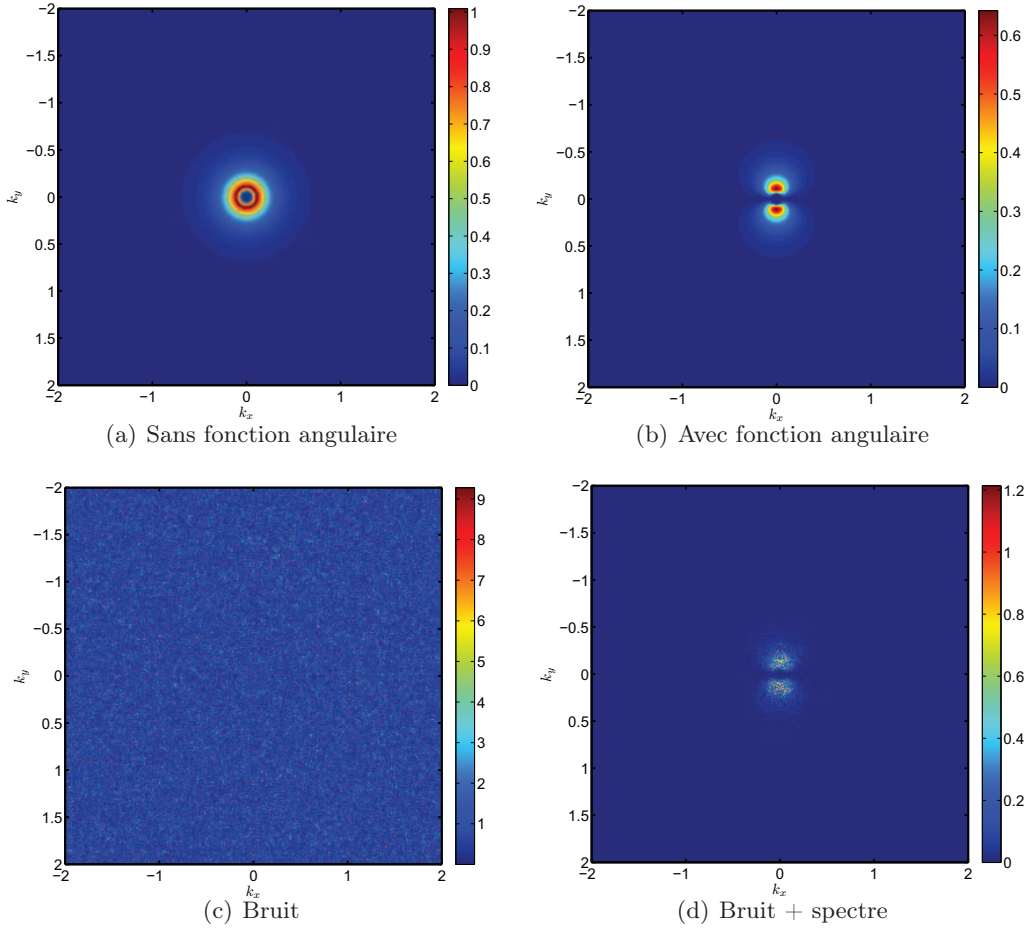


FIGURE 4.14 – Spectre d’Elfouhaily à 2 dimensions en fonction du nombre d’onde pour une vitesse du vent de 5 m/s, une direction du vent  $\phi = 0^\circ$  et une mer développée.

Dans le cas où  $i < 0$ , on a la propriété  $G1_{i,u} = G1_{-i,u}^*$ . De la même façon,  $\forall i$ , si  $u \geq 0$  :

$$G2_{i,u} = \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) & \text{si } i = 0 \\ 1/\sqrt{2}(\mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)) & \text{si } i < 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Dans le cas où  $i < 0$ , on a la propriété  $G2_{i,u} = G1_{i,-u}^*$ .

Au final, la fonction d’élévation est définie par l’inverse d’une transformée de Fourier :

$$\zeta(x_n, y_m) = \frac{(-1)^{n+m}}{\Delta_x \Delta_y} \text{ifft2}(F) \quad (4.62)$$

avec ifft2 la transformée de Fourier inverse à 2 dimensions.

Nous représentons une surface de mer de taille  $512 \text{ m} \times 512 \text{ m}$  avec une vitesse du vent de 5 et 8 m/s et une direction du vent de  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 50^\circ$  (Figure 4.15). Nous remarquons que la vitesse du vent a une influence sur la hauteur des vagues et que la direction du vent influe sur l’orientation des vagues.



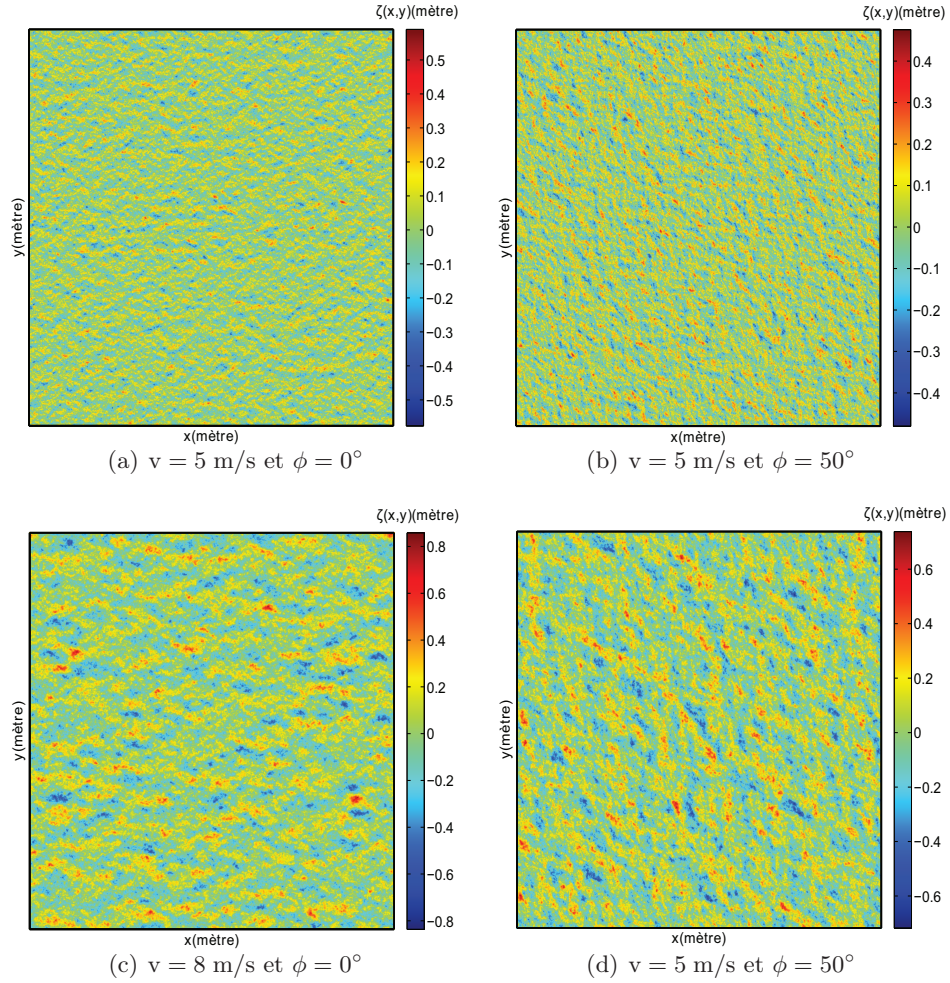


FIGURE 4.15 – Exemple de surface avec le spectre d’Elfouhaily.

### 4.3 Modèles asymptotiques de diffusion électromagnétique

Dans la section précédente, nous avons exposé les différentes caractéristiques géométriques et physiques d’une surface maritime. Dans cette partie, nous nous intéressons à la détermination du coefficient de diffusion électromagnétique d’une surface rugueuse. Il existe deux grandes familles permettant de calculer le coefficient de diffusion :

- les méthodes dites asymptotiques [26], qui calculent le champ diffusé moyennant des approximations.
- les méthodes dites numériques ou exactes, qui résolvent les équations de Maxwell locales sur des interfaces.

Les méthodes asymptotiques sont classées en trois sous-familles. Tout d’abord, on retrouve les méthodes de rayons comme l’Optique Géométrique [24] (*Geometrical Optics : GO*), la Théorie Géométrique de la Diffraction [111] (*Geometric Theory of Diffraction : GTD*) ou la théorie Uniforme de la Diffraction [125] (*Uniform Theory of Diffraction : UTD*). L’Optique Géométrique permet de relier les différents champs entre eux à partir des coefficients issus des lois de Snell-Descartes en supposant que la longueur d’onde soit petite par rapport aux dimensions de l’objet. Cependant, cette méthode ne prend pas en compte les zones d’ombres : en réalité, les zones d’ombres contiennent un champ. La théorie Uniforme de la diffraction a ainsi été proposée

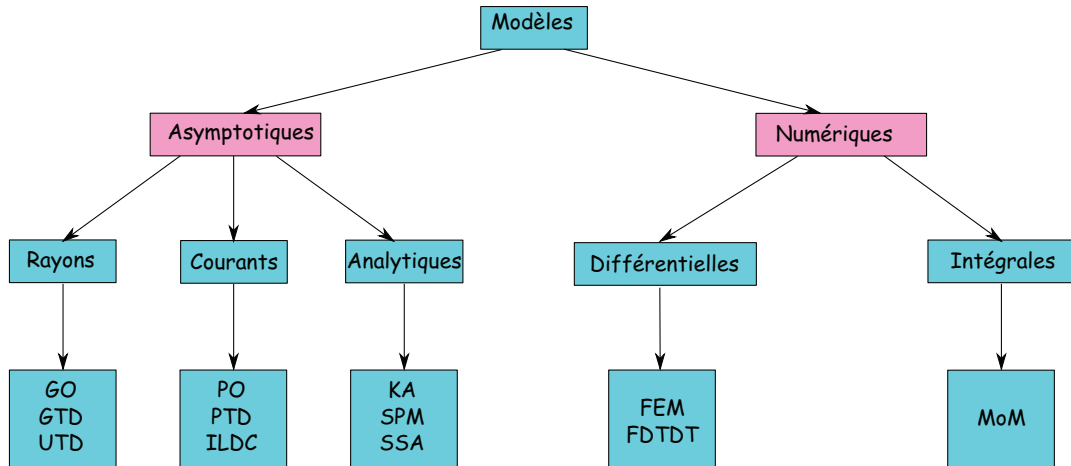


FIGURE 4.16 – Classification des différents modèles de diffusion.

afin de pallier cette anomalie en prenant en compte les phénomènes de diffraction sur les arêtes.

Ensuite, on relève des méthodes de courants comme l'Optique Physique [97] (*Physical Optics : PO*), la Théorie Physique de la Diffraction [217] (*Physical Theory of Diffraction : PTD*) ou la théorie des Coefficients Incrémentaux de Longueur de Diffraction [155, 198] (*Incremental Length Diffraction Coefficients : ILDC*). L'optique physique remplace l'objet diffusant par des sources placées sur la surface en supposant que la longueur d'onde soit petite par rapport aux dimensions de l'objet. L'inconvénient de l'optique physique est qu'elle ne prend pas en compte les phénomènes de diffraction sur les discontinuités. Il est possible de modéliser cette contrainte à partir de la théorie physique de la diffraction. La limitation de cette méthode est qu'elle ne prend pas en compte l'existence de courants sur les arêtes. La théorie des coefficients équivalents [153, 154] (*Method of Equivalent Currents : MEC*) a été développée afin de répondre à cet effet.

La dernière catégorie correspond à des méthodes analytiques. On retrouve notamment l'approximation de Kirchhoff [16, 218] (*Kirchhoff Approximation : KA*) (haute fréquence) ou la méthode des petites perturbations [183] (*Small Perturbations Method : SPM*) (basse fréquence), mais aussi le modèle faibles pentes [152, 221, 222] (*Small Slope Approximation : SSA*) ou le modèle des petites perturbations à un ordre supérieur à [108].

Il est possible d'utiliser des méthodes numériques lorsque qu'une des méthodes est limitée ou lorsqu'il est nécessaire de valider une approximation. Elles sont fondées sur une discrétisation spatio-temporelles du problème. Les modèles numériques sont classés en deux groupes : les méthodes différentielles et les méthodes intégrales. Les méthodes différentielles sont formulées à partir d'un problème d'équations aux dérivées partielles. Il est nécessaire d'introduire un maillage afin de résoudre le problème. Ces méthodes sont du type éléments finis dans le domaine fréquentiel (*Finite Element Model : FEM*) [18] ou du type différences finies dans le domaine temporel (*Finite Difference Time Domain Technique : FDTD*). Comme son nom l'indique, les méthodes intégrales s'appuient sur des équations intégrales du champ sur la surface. La méthode des moments [98] (*Method Of Moments : MoM*) est une méthode de discrétisation d'équations électromagnétiques intégrales.

Le problème avec les méthodes numériques est qu'elles sont coûteuses en temps de calcul. Nous nous orientons donc vers les méthodes dites asymptotiques. Les méthodes asymptotiques utilisent la matrice de diffusion afin de calculer le coefficient de diffusion. Par la suite, nous présentons essentiellement l'approximation de Kirchhoff, le modèle des petites perturbations et

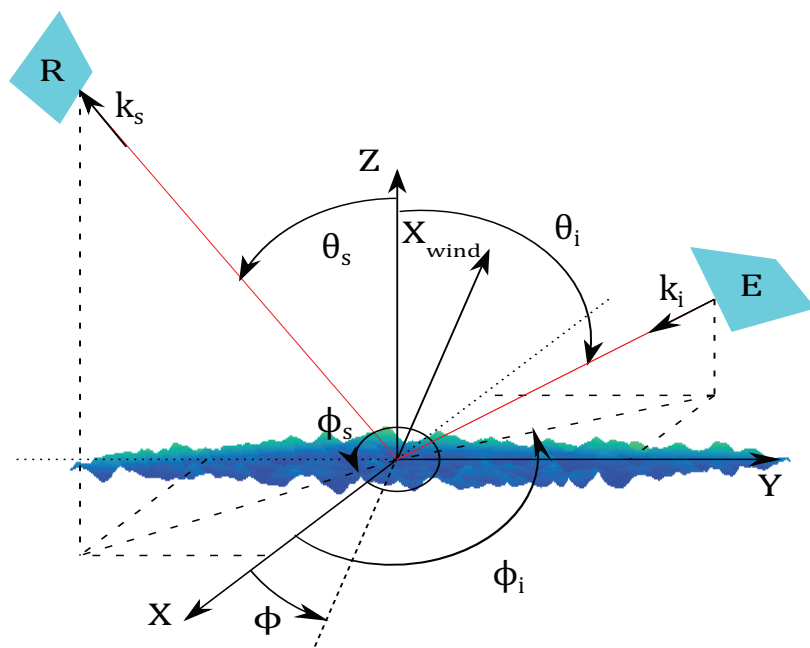


FIGURE 4.17 – Configuration géométrique définissant les angles bistatiques.

l'optique physique. La configuration définissant les angles bistatiques utilisée pour l'approximation de Kirchhoff et la méthode des petites perturbations est illustrée par la Figure 4.17. La position de l'émetteur (notée E) est définie par le couple  $(\phi_i, \theta_i)$  et la position du récepteur (notée R) est définie par le couple  $(\phi_s, \theta_s)$ .

### 4.3.1 Approximation de Kirchhoff

L'approximation de Kirchhoff ou approximation du plan tangent est une méthode permettant d'évaluer la contribution spéculaire d'une onde électromagnétique. Les travaux de Brekovskikh ont permis d'introduire le modèle de Kirchhoff. Le modèle de Kirchhoff est explicité dans les ouvrages tels que [16, 218] et a été adapté au cas bistatique dans [15]. Il est possible d'assimiler chaque point de la surface par un plan tangent sous l'hypothèse que la longueur d'onde soit faible devant le rayon de courbure des vagues. Par conséquent, les lois de l'optique géométrique prévoient que l'onde incidente est réfléchie de manière spéculaire par le plan tangent en chaque point de la surface. Le champ réfléchi par la surface et le champ incident sont alors reliés par les coefficients de Fresnel. Le problème est que l'approximation du plan tangent ne suffit pas à calculer le coefficient de diffusion. Il est nécessaire d'introduire l'approximation de la phase stationnaire [208]. Le champ diffusé n'a alors qu'une contribution spéculaire. L'utilisation de l'approximation de l'optique géométrique [68] permet d'obtenir un coefficient de diffusion électromagnétique proportionnel à la probabilité des pentes  $P(Z_x, Z_y)$ . Le coefficient de diffusion, sous sa forme simplifiée, est défini par :

$$\sigma_{pq}^s = \frac{\pi k^2 q^2}{q_z^2} |U_{pq}|^2 P(Z_x, Z_y) \quad (4.63)$$

où l'expression du coefficient de polarisation  $U_{pq}$  est définie en Annexe E.1 suivant les polarisations en émission  $p$  et en réception  $q$  choisies.

Nous représentons les coefficients de diffusion dans le cas de l'approximation de Kirchhoff dans le cas bistatique avec :  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ ,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $T = 20^\circ$ ,  $S = 35$  ppm,  $f = 10$  GHz et une vitesse de vent  $U_{1250} = 5$  m/s. La simulation permet de voir que le maximum d'énergie

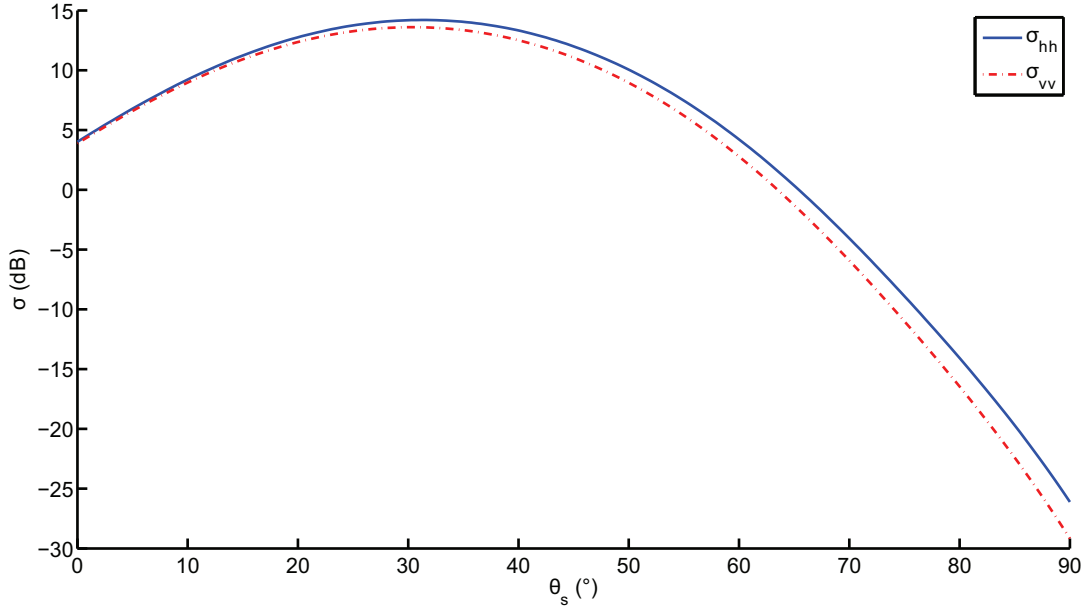


FIGURE 4.18 – Coefficients de diffusion obtenus par l’approximation de Kirchhoff dans le cas bistatique pour  $\theta_i = 30^\circ$ .

se trouve dans la direction spéculaire  $\theta_s = 30^\circ$ . Le problème avec cette méthode est qu’elle ne prend pas en compte les zones d’ombres.

### 4.3.2 Méthode des petites perturbations

La méthode des petites perturbations (*small perturbations method* en anglais), a été introduit par Rice [183]. Ce modèle est utilisé dans le cas de surface faiblement rugueuse (longueur de corrélation et hauteur petites devant la longueur d’onde) contrairement à l’approximation de Kirchhoff (longueur de corrélation et hauteur grande devant la longueur d’onde). Dans cette configuration, la méthode des petites perturbations est appelée aussi “diffraction de Bragg” : les vagues réfléchissant le plus d’énergie sont celles qui diffractent les ondes incidentes telles que ces ondes interfèrent constructivement. La méthode des petites perturbations peut être considérée comme un développement limité du champ diffusé en fonction des hauteurs de la surface. Le nombre de réflexions par la surface constitue l’ordre du développement limité. Rice [183] a proposé la méthode des petites perturbations limitée à l’ordre 1 et 2. Le coefficient de diffusion obtenu par le modèle des petites perturbations à l’ordre 1 dans le cas bistatique est défini par [104] :

$$\sigma_{pq}^s = 8|k^2 \cos(\theta) \cos(\theta_s) \alpha_{pq}|^2 \frac{S(\|\mathbf{K}_1\|)}{\|\mathbf{K}_1\|} \quad (4.64)$$

avec  $\mathbf{K}_1$  représentant le vecteur d’onde des vaguelettes de Bragg bistatique donné par la relation :

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_s) \cos(\phi_s - \phi_i) - \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_s) \sin(\phi_s - \phi_i) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Les coefficients  $\alpha_{pq}$  sont donnés en Annexe E.2 en fonction des polarisations en émission  $p$  et en réception  $q$ .

Nous représentons les coefficients de diffusion par le modèle des petites perturbations pour les polarisations VV et HH dans le cas bistatique avec :  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ ,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $T = 20^\circ$ ,

$S = 35$  ppm,  $f = 10$  GHz, une vitesse de vent  $U_{1250} = 5$  m/s et une direction du vent  $\phi = 0^\circ$  ainsi qu'un spectre d'Elfouhaily dans la Figure 4.19.

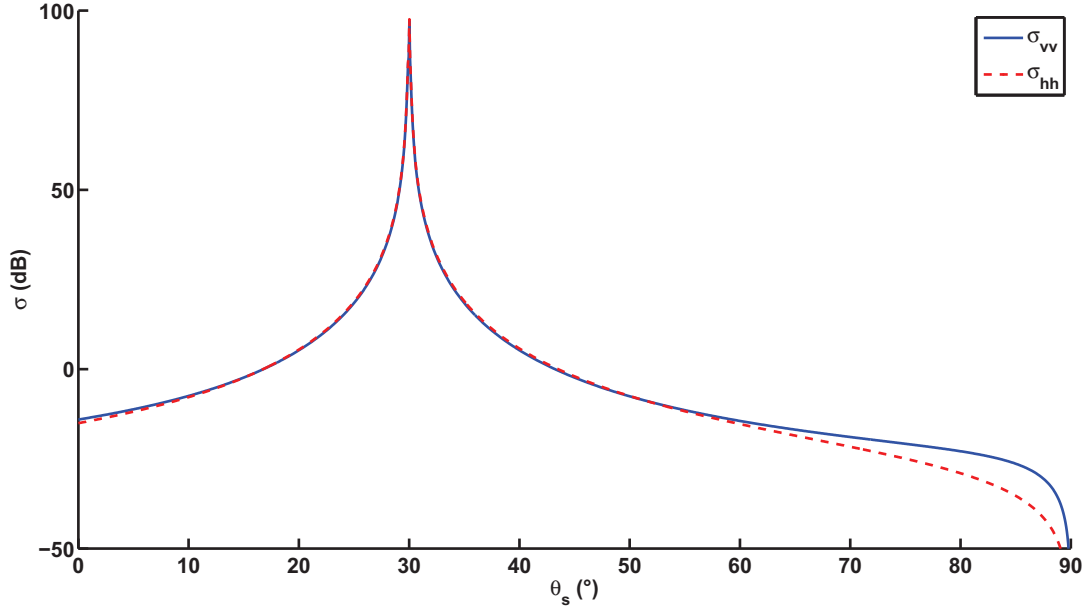


FIGURE 4.19 – Coefficients de diffusion par le modèle des petites perturbations à l'ordre 1 dans le cas bistatique pour  $\theta_i = 30^\circ$ .

### 4.3.3 Optique physique

L'optique physique (*Physical Optics* en anglais) est une méthode dite de courants permettant de calculer le champ diffusé par une surface en faisant une approximation des courants induits par l'onde incidente sur la surface de l'objet illuminé. On obtient le champ diffusé à partir d'une intégration des courants induits sur toute la surface illuminée par l'onde incidente. La densité de courant sur une surface plane parfaitement conductrice est obtenue à partir des conditions aux limites du champ magnétique tangentiel (théorème d'équivalence [22, 194]) :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_t \quad (4.66)$$

avec  $\mathbf{J}_s$  la densité de courant de surface,  $\mathbf{H}_t$  le champ magnétique tangentiel total sur la surface et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface.

Dans le cas d'une onde incidente plane, le champ magnétique tangentiel est le double du champ magnétique tangentiel incident :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_t) = 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i \quad (4.67)$$

Le calcul de la densité de courant s'effectue à partir de l'équation (4.67) dans le cas d'une surface localement lisse et parfaitement conductrice ayant des dimensions finies. On suppose que lorsqu'une surface n'est pas illuminée par un rayon, la densité de courant de cette surface est nulle. On obtient alors :

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} 2\mathbf{n} \times \mathbf{H}_i, & \text{si la surface est illuminée} \\ 0, & \text{si la surface est ombragée} \end{cases} \quad (4.68)$$

L'application de l'optique physique est basée sur trois hypothèses [190] :

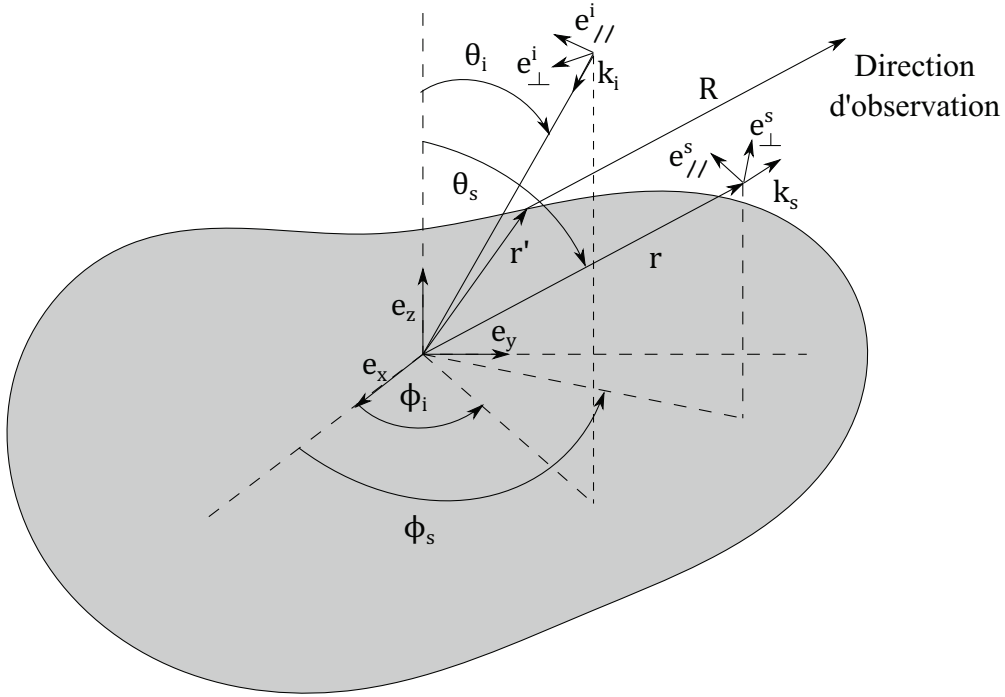


FIGURE 4.20 – Configuration utilisée.

- les dimensions de la cible doivent être supérieures à la longueur d'onde (hypothèse de hautes fréquences).
- le rayon de courbure de la surface directement illuminée doit être supérieur à la longueur d'onde.
- on est sous l'hypothèse de champ lointain, c'est-à-dire que la cible est suffisamment éloignée du point d'observation pour que le front d'onde soit plan.

Tout d'abord, il est nécessaire de définir le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  afin de calculer le champ diffusé :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{2\pi} \int \int_S \mathbf{J}_s \frac{e^{-jkR}}{R} ds \quad (4.69)$$

avec  $R$  la distance d'un élément de courant au point d'observation.

Le champ rayonné est calculé à partir du potentiel vecteur magnétique par la relation :

$$\mathbf{E}_s = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) \quad (4.70)$$

qui peut être approximée sous l'hypothèse de champ lointain par :

$$E_s \approx -j\omega\mathbf{A} \quad (4.71)$$

La Figure 4.20 permet de définir la quantité  $r$  correspondant au vecteur position du point d'observation et  $R$  un vecteur entre un élément de surface et le point d'observation. En se plaçant dans l'hypothèse de champ lointain, les vecteurs  $r$  et  $R$  sont parallèles. La quantité  $R$  est alors déterminée par :

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx |\mathbf{r}| - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}_s \quad (4.72)$$

Considérons un repère orthonormé direct  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . Le vecteur position d'un élément de surface est défini par :

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z \quad (4.73)$$



Dans le même repère, le vecteur unitaire dans la direction du propagation est défini par :

$$\mathbf{k}_s = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z \quad (4.74)$$

avec  $u$ ,  $v$  et  $w$  exprimé en fonction de la géométrie d'observation :

$$u = \sin \theta_s \cos \phi_s \quad (4.75)$$

$$v = \sin \theta_s \sin \phi_s \quad (4.76)$$

$$w = \cos \theta_s \quad (4.77)$$

En injectant les équations (4.72), (4.68) et (4.69) dans l'équation (4.71) et en supposant que  $\mathbf{r} \gg \mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}_s$ , on obtient le champ diffusé par l'optique physique :

$$\mathbf{E}_s(r) \approx -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int \int_S \mathbf{J}_s(r) e^{jk\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}'} ds \quad (4.78)$$

On suppose que la composante radiale est nulle.

Pour déterminer la densité de courant  $\mathbf{J}_s$ , il est nécessaire de définir le champ magnétique incident  $\mathbf{H}_i$ . Sous l'hypothèse de champ lointain, le champ incident forme une onde plane et les champs électrique et magnétique sont déterminés par les relations :

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'} \quad (4.80)$$

$$\mathbf{H}_{i0} = \frac{1}{Z} \mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{i0} \quad (4.81)$$

avec  $\mathbf{E}_{i0}$  et  $\mathbf{H}_{i0}$  sont des vecteurs d'amplitude réelle et constante,  $Z$  l'impédance du milieu et  $\mathbf{k}_i$  le vecteur de propagation incident défini par la relation :

$$\mathbf{k}_i = -(\sin \theta_i \cos \phi_i \mathbf{e}_x + \sin \theta_i \sin \phi_i \mathbf{e}_y + \cos \theta_i \mathbf{e}_z) \quad (4.82)$$

Le champ électrique a deux composantes orthogonales :

$$\mathbf{E}_i = (E_i^{\parallel} \mathbf{e}_{i\parallel}^i + E_i^{\perp} \mathbf{e}_{i\perp}^i) e^{jk\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'} \quad (4.83)$$

À partir des équations (4.68) et (4.83), la densité de courant de surface est définie par :

$$\mathbf{J}_s = \frac{2}{Z} \mathbf{n} \times (E_i^{\perp} \mathbf{e}_{i\parallel}^i - E_i^{\parallel} \mathbf{e}_{i\perp}^i) e^{-jk\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}'} \quad (4.84)$$

À partir des équations (4.84) et (4.78), le champ diffusé s'exprime par :

$$\mathbf{E}_s = -\frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \int \int \mathbf{n} \times (E_i^{\perp} \mathbf{e}_{i\parallel}^i - E_i^{\parallel} \mathbf{e}_{i\perp}^i) e^{-jk(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}'} ds' \quad (4.85)$$

avec l'impédance intrinsèque de l'air  $Z = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $\omega = 2\pi c/\lambda$  et  $c = \sqrt{1/(\mu_0\epsilon_0)}$  la vitesse de propagation de l'onde dans l'air.

Dans l'hypothèse d'une surface plane, les relations vectorielles sont constantes, il est donc possible de les sortir de l'intégrale. L'équation (4.85) s'écrit alors par :

$$\mathbf{E}_s = -\frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{n} \times (E_i^{\perp} \mathbf{e}_{i\parallel}^i - E_i^{\parallel} \mathbf{e}_{i\perp}^i) \int \int e^{-jk(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}'} ds' \quad (4.86)$$

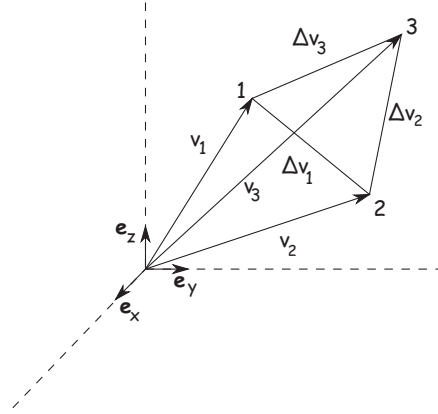


FIGURE 4.21 – Géométrie d'une facette

Il ne reste plus qu'à déterminer la quantité  $I_c = \iint e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{s}'$ . Il est possible de transformer cette intégrale par une intégrale de contour en supposant une surface plane polygonale [89]. L'intégrale  $I_c$  est alors définie par :

$$I_c \approx -\frac{j}{k} \frac{(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s| |\mathbf{n}|^2} \cdot \sum_{i=1}^N \text{sinc}\left(\frac{k}{2}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \Delta \mathbf{v}_i\right) e^{-j\frac{k}{2}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})} \quad (4.87)$$

avec  $N$  le nombre de côtés du polygone,  $\mathbf{v}_i$  la position du  $i^{\text{ième}}$  sommet et  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i$ .

Nous nous plaçons dans le cas de facettes triangulaires, on aura donc  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Dans le repère orthonormé  $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , les vecteurs positions des sommets sont déterminés par la relation :

$$\mathbf{v}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y + z_i \mathbf{e}_z \quad (4.88)$$

Il est possible de déterminer un vecteur normal à la facette triangulaire en prenant le produit vectoriel de deux vecteurs de bord :

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{v}_1 \times \Delta \mathbf{v}_3}{|\Delta \mathbf{v}_1| |\Delta \mathbf{v}_3|} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z \quad (4.89)$$

La détection d'une facette visible ou ombragée est possible en calculant le produit scalaire du vecteur unitaire normal à la surface et du vecteur unitaire donnant la relation de l'onde incidente.

La facette est visible si :

$$-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad (4.90)$$

La contribution de  $M$  facettes (voir la Figure 4.22 pour une surface découpée par des triangles) va être calculée par :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{e^{jkr}}{r} \sum_{u=1}^M \mathbf{n}_u \times (E_i^\perp \mathbf{e}_{//}^i - E_i^{//} \mathbf{e}_\perp^i) \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{n}_u}{|\mathbf{K} \times \mathbf{n}_u|^2} \cdot \sum_{i=1}^N \text{sinc}\left(\frac{k}{2} \mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{v}_i\right) e^{-j\frac{k}{2} \mathbf{K} \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})} \quad (4.91)$$

avec  $\mathbf{K} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$ .

En supposant que  $|\mathbf{E}_i| = 1$ , la surface équivalente radar est définie par la relation :

$$\sigma = 4\pi r^2 |\mathbf{E}_s|^2 \quad (4.92)$$



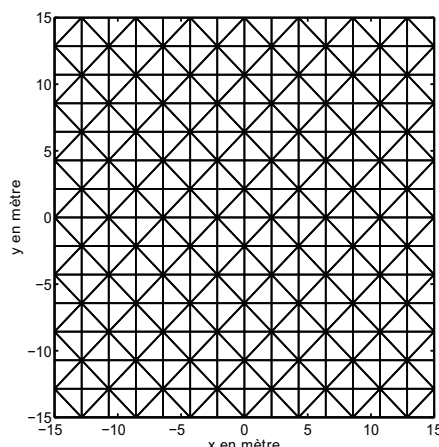


FIGURE 4.22 – Découpage de la surface par des facettes triangulaires

Dans cette partie, nous avons présenté différents spectres électromagnétiques couramment utilisés pour générer une surface maritime. Nous avons retenu le spectre d'Elfouhily pour générer notre surface maritime car il permet de modéliser les vagues de gravité, de vagues de capillarité et le *fetch*. Ensuite, nous avons choisi de calculer la surface équivalente radar de cette surface maritime à partir de l'optique physique. Dans la section 4.4, nous utilisons une approche statistique pour caractériser le fouillis de mer.

## 4.4 Simulation et analyse statistique

La description de la diffusion d'une onde électromagnétique par une surface maritime à partir d'une fonction de densité de probabilité est un problème essentiel dans la détection de cible radar maritime. L'objectif va donc être d'effectuer une étude statistique de la surface équivalente radar de la mer. Tout d'abord, nous introduisons la configuration globale d'observation et de traitement que nous avons retenu notamment les aspects physiques et géométriques de la surface maritime.

### 4.4.1 Méthodologie et chaîne de traitement

La configuration globale d'observation et de traitement adoptée avec les différentes étapes décrites dans cette partie sont représentées dans la figure 4.23. Tout d'abord, le calcul de la surface équivalente radar va être dépendant des caractéristiques physiques et géométriques de la surface de mer développées dans la section 4.2 : la température, la salinité, la permittivité diélectrique, la vitesse du vent et la direction du vent. Nous utilisons le modèle de Debye développé dans la section 4.2.1.3 pour modéliser les propriétés électriques de l'eau de mer. Le spectre de mer proposé par Elfouhaily *et al.* est utilisé afin de modéliser les vagues de gravité et de capillarité (implicitement ce spectre prend en compte les paramètres de vitesse du vent, direction du vent et le *fetch*).

Ensuite, le calcul du champ diffusé est fonction de la fréquence de l'onde incidente, de la polarisation de l'onde émise et reçue ainsi que de la géométrie d'observation. Nous considérons plusieurs réalisations de la surface maritime, chacune peut être traitée comme déterministe. Par conséquent, nous utilisons une approche déterministe fondée sur une discrétisation par des facettes triangulaires de la surface maritime générée afin de calculer le champ diffusé. Dans le cas de l'optique physique, le calcul de la surface équivalente radar est indépendant du nombre de facettes, ce qui n'est pas le cas pour l'optique physique modifiée, la théorie physique de la

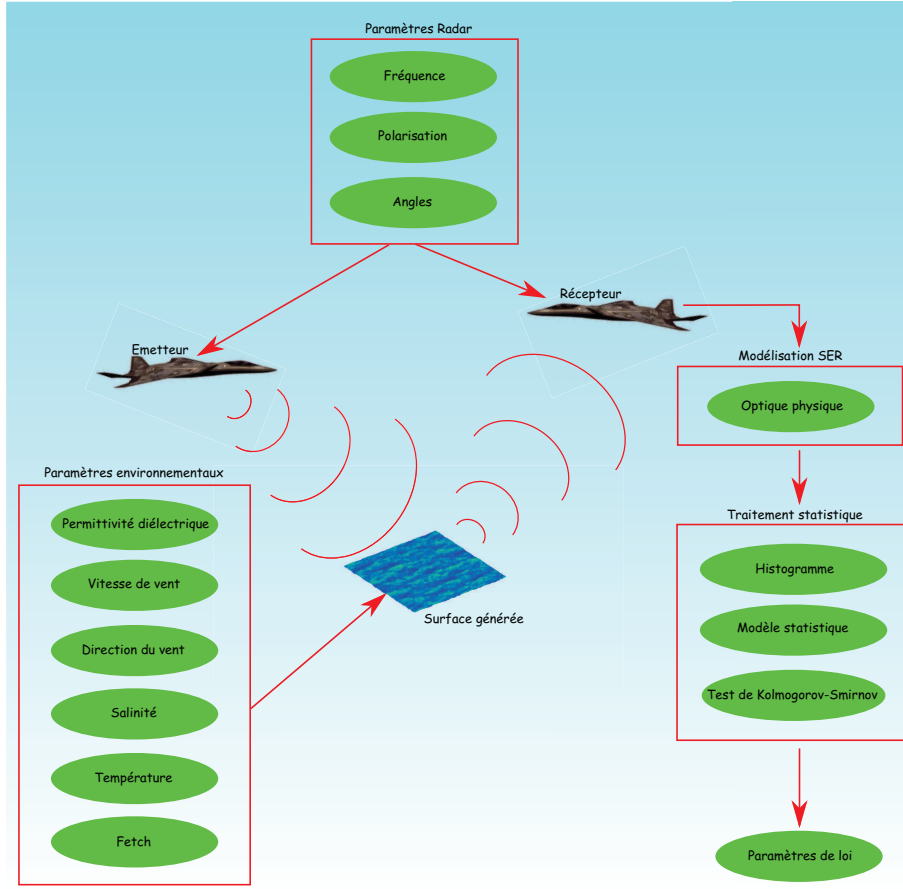


FIGURE 4.23 – Chaîne globale d'observation et de traitement.

diffraction et la théorie physique de la diffraction modifiée. Le problème du nombre de facettes a été abordé dans [205]. Dans le cas de l'optique physique, l'intensité des champs rayonnants est proportionnelle à la surface des facettes.

Dans notre étude, nous considérons une surface de  $30 \text{ m} \times 30 \text{ m}$  en découpant chaque arête de la surface par 15 triangles. L'optique physique permet alors d'obtenir les coefficients de diffusion électromagnétique de la surface maritime en fonction de la configuration géométrique (angle d'incidence ou angle de réception). Il est possible de comparer l'évolution de la surface équivalente radar en fonction de l'angle de réception obtenue par l'optique physique et d'autre part obtenue par la méthode des petites perturbations détaillée en section 4.3. Cette comparaison est effectuée pour la polarisation HH avec une vitesse du vent  $v = 3 \text{ m/s}$ , direction du vent  $\phi = 0^\circ$  et pour deux positions de l'émetteur fixe :  $(\theta_i = 30^\circ, \phi_i = 0^\circ)$  et  $(\theta_i = 50^\circ, \phi_i = 0^\circ)$ . On remarque que sur la figure 4.24, nous avons un maximum lorsque  $\theta_i = \theta_s$ . Cette observation correspond au domaine spéculaire et donc par conséquent l'intensité réfléchie est maximale. Ensuite, la méthode utilisée pour calculer le champ diffusé est en accord avec la méthode des petites perturbations ce qui nous permet de valider l'approche adoptée. À partir de cette approche, nous allons constituer une base de données avec, pour une vitesse du vent donnée, une direction du vent donnée et une polarisation donnée, des matrices de  $500 \times 19 \times 19$  avec 19 représentant la discrétisation de l'angle d'émission et de réception variant de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  avec un pas de  $5^\circ$  et 500 le nombre de surfaces maritimes générées.

Partant de cette base de données ainsi constituée, nous effectuons une étude statistique. Tout d'abord, à angle fixé, nous prélevons aléatoirement 50 coefficients de diffusion parmi les

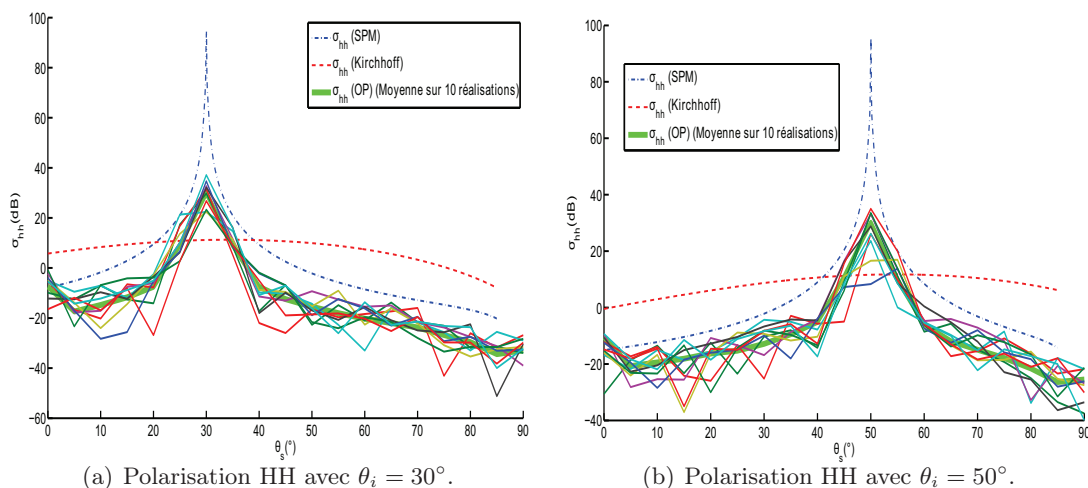


FIGURE 4.24 – Comparaison du champ diffusé de la surface maritime obtenu par l’approximation de Kirchhoff, la méthode des petites perturbations et l’optique physique dans le cas d’une polarisation HH, une vitesse du vent  $v = 3$  m/s, une direction du vent  $\phi = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$  et  $\phi_s = 0^\circ$ .

500. Nous construisons alors un histogramme à partir de ces 50 données. Par la suite, l’une des phases importante est de choisir un modèle permettant d’approcher au mieux l’histogramme. Nous utilisons une méthode par moindres carrés afin d’estimer les paramètres des lois. La validité du modèle va être évalué à partir d’un test de Kolmogorov-Smirnov détaillé en section 1.4. Si le test n’est pas validé, le modèle n’est pas correct ; par contre si le test est vérifié, le modèle est en adéquation avec les données. Cette démarche est effectuée 15 fois pour ensuite faire une étude statistique sur les paramètres de la loi. Dans la partie suivante, les lois continues considérées sont comparées entre elles à partir d’un test de Kolmogorov-Smirnov.

## 4.4.2 Interprétation des résultats et choix du modèle

### 4.4.2.1 Comparaison des distributions : Weibull, $\mathcal{K}$ et $\alpha$ -stable

Dans la littérature, la description statistique du fouillis de mer est réalisée à partir de l’amplitude du champ diffusé  $z = E_s^2$ . Dans [227], Ward *et al.* rappellent l’expression de la distribution de Weibull et de la distribution  $\mathcal{K}$  pour caractériser la densité de probabilité du champ diffusé. La densité de probabilité d’une loi de Weibull est donnée par la relation :

$$f_{\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)}(z) = \begin{cases} \frac{k_W}{\lambda_W} \left( \frac{z}{\lambda_W} \right)^{(k_W-1)} \exp \left( - \left( \frac{z}{\lambda_W} \right)^{k_W} \right) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.93)$$

avec  $\lambda_W \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $k_W \in \mathbb{R}^{+*}$ . Il faut faire attention si on utilise l’expression donnée par Ward *et al.* [227] (p 128, équation (4.88)) car nous pensons qu’elle est à vérifier

La densité de probabilité d’une loi  $\mathcal{K}$  est donnée par la relation (Ward *et al.* [227], p 109, équation (4.26)) :

$$f_{\mathcal{K}(b_K, \nu_K)}(z) = \begin{cases} \frac{2}{z} (b_K z)^{\frac{1+\nu_K}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu_K)} K_{\nu_K-1} \left( 2\sqrt{b_K z} \right) & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.94)$$

avec  $b_K \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\nu_K \in \mathbb{R}$ . L'équation (4.94) peut être obtenue à partir de l'équation (1.53) en réalisant des changements de variables judicieux.

L'expression de la densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable utilisée dans cette section est donnée par l'équation (2.5).

Dans cette partie, nous considérons les coefficients de diffusion en polarisation HH, avec vitesse du vent  $v = 3$  m/s et direction du vent  $\phi = 0^\circ$ . Nous avons considéré une seule polarisation, car les résultats obtenus pour les autres polarisations sont équivalents. La Figure 4.25

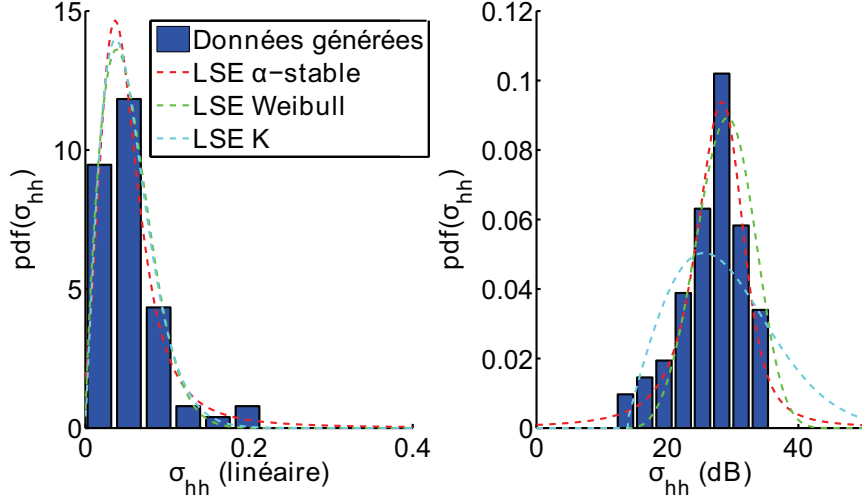


FIGURE 4.25 – Représentations des densités de probabilité de la surface équivalente radar et de leurs estimations (Weibull,  $\mathcal{K}$  et  $\alpha$ -stable) exprimées en linéaire et en dB avec une polarisation HH,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\theta_s = 30^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$  et  $v = 3$  m/s.

permet de constater que les loi de Weibull,  $\mathcal{K}$  et  $\alpha$ -stable donnent des résultats similaires en terme d'estimation de la densité de probabilité de la surface équivalente radar exprimée en linéaire. Il est aussi possible d'exprimer le coefficient de diffusion en dB obtenu par la relation  $\sigma_0 = 10 \log(|E_s|/|E_i|)^2$ . L'échelle logarithmique a l'avantage de prendre en compte les ordres de grandeur par rapport à l'échelle linéaire. Nous rappelons les expressions des densités de probabilité des lois de Weibull,  $\mathcal{K}$  et  $\alpha$ -stable présentées la section 1.3.2.

L'expression de la densité de probabilité d'une loi de Weibull est donnée par la relation :

$$f_{\mathcal{W}(\lambda_W, k_W)}(\sigma_0) = \begin{cases} \frac{k_W}{\lambda_W} \left( \frac{\sigma_0}{\lambda_W} \right)^{(k_W-1)} \exp \left( - \left( \frac{\sigma_0}{\lambda_W} \right)^{k_W} \right) & \text{si } \sigma_0 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.95)$$

avec  $\lambda_W \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $k_W \in \mathbb{R}^{+*}$ .

L'expression de la densité de probabilité d'une loi  $\mathcal{K}$  est donnée par la relation :

$$f_{\mathcal{K}(\mu_{K_2}, \nu_{K_2})}(\sigma_0) = \begin{cases} \frac{2}{\mu_{K_2} \Gamma(\nu_{K_2} + 1)} \left( \frac{\sigma_0}{2\mu_{K_2}} \right)^{\nu_{K_2}+1} K_{\nu_{K_2}} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_{K_2}} \right) & \text{si } \sigma_0 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.96)$$

avec  $\nu_{K_2} > -1$  et  $\mu_{K_2} > 0$ .

Nous comparons différents types de modèles (distribution de Weibull, distribution  $\mathcal{K}$  et distribution  $\alpha$ -stable) permettant de représenter les coefficients de diffusion. Un test de Kolmogorov-Smirnov est réalisé afin de tester la validité de chaque modèle. Dans le cas de données générées

avec un faible état de mer, la loi  $\mathcal{K}$  n'est pas adaptée car le taux de succès du test de Kolmogorov-Smirnov est proche de 10 % (Figure 4.26). Cette observation est aussi valable pour la loi de Weibull, avec un degré moindre puisque le taux de succès du test de Kolmogorov-Smirnov est aux alentours de 50 %. Enfin, on remarque que le taux de succès du test de Kolmogorov-Smirnov est compris entre 95 % et 100 % ce qui permet d'affirmer que nos données peuvent être modélisées à partir des distributions  $\alpha$ -stables.

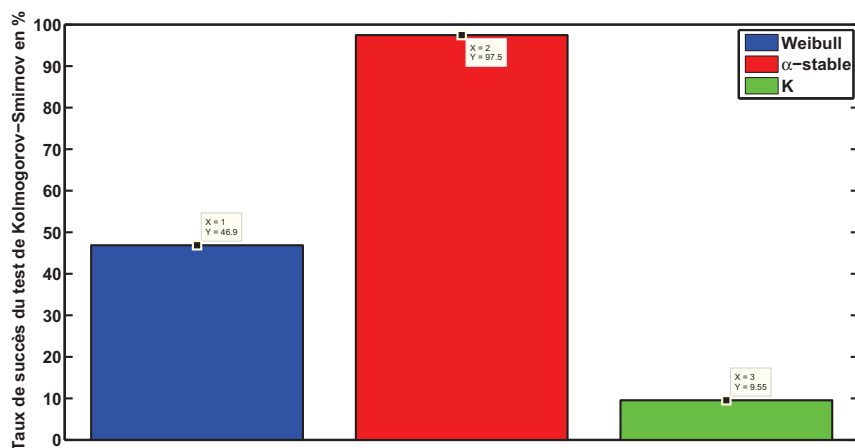


FIGURE 4.26 – Taux de réussite du test de Kolmogorov-Smirnov.

Nous représentons graphiquement à l'aide de la Figure 4.27 les densités de probabilités et fonctions de répartition estimées ainsi que les courbes réelles dans le cas où  $\theta_i = 30^\circ$  et  $\theta_s = 60^\circ$ . On remarque que la loi  $\mathcal{K}$  souffre d'un problème pour atteindre le mode de la densité réelle. De plus, la loi  $\mathcal{K}$  n'arrive pas à représenter l'asymétrie à gauche. La loi de Weibull permet d'atteindre le mode de la densité réelle. Cependant, comme pour la loi  $\mathcal{K}$ , il y a un problème pour retrouver l'asymétrie à gauche. L'avantage de la loi  $\alpha$ -stable par rapport aux deux autres lois est qu'elle peut représenter l'asymétrie à gauche et qu'elle arrive à ajuster le mode de la distribution réelle. Par conséquent, nous continuons notre étude avec les distributions  $\alpha$ -stables. Nous allons estimer un intervalle de confiance des paramètres de la distribution  $\alpha$ -stable. La borne inférieure correspond au premier quartile et la borne supérieure au troisième quartile. Le problème avec cette représentation est qu'il est difficile de déduire de l'information [78]. Par conséquent, nous allons calculer la densité de probabilité des paramètres de la loi. On remarque que pour le paramètre  $\alpha$ , une grande majorité des valeurs est proche de 2. Pour les autres valeurs, on peut dire qu'elles sont réparties uniformément dans  $[1; 2]$ . Pour le paramètre  $\beta$ , la valeur -1 est la plus fréquente et tandis que les autres valeurs sont comprises dans l'intervalle  $[-1; -0,8]$ . Le paramètre  $\gamma$  est réparti de manière gaussienne dans l'intervalle  $[1,5; 6]$  avec pour mode  $\gamma = 3,5$ . Le paramètre  $\delta$  se caractérise par 3 modes. Le mode le plus petit correspond aux valeurs de  $\delta$  lorsque  $\theta_i = \theta_s$ . Le mode intermédiaire correspond aux valeurs de  $\delta$  lorsque  $\theta_i$  et  $\theta_s$  sont proches. Enfin, le mode le plus haut correspond aux valeurs de  $\delta$  lorsque  $\theta_i$  et  $\theta_s$  sont éloignés. Par la suite, nous analysons l'influence de la polarisation, de la vitesse du vent et de la direction du vent sur la densité de probabilité des paramètres des distributions  $\alpha$ -stables.

#### 4.4.2.2 Influence des paramètres des distributions $\alpha$ -stables

Nous considérons 24 configurations en variant la polarisation : HH, HV, VV et VH ; la vitesse du vent : 3 m/s et 5 m/s ; et l'orientation du vent :  $0^\circ$ ,  $25^\circ$  et  $60^\circ$ . Les résultats présentés dans

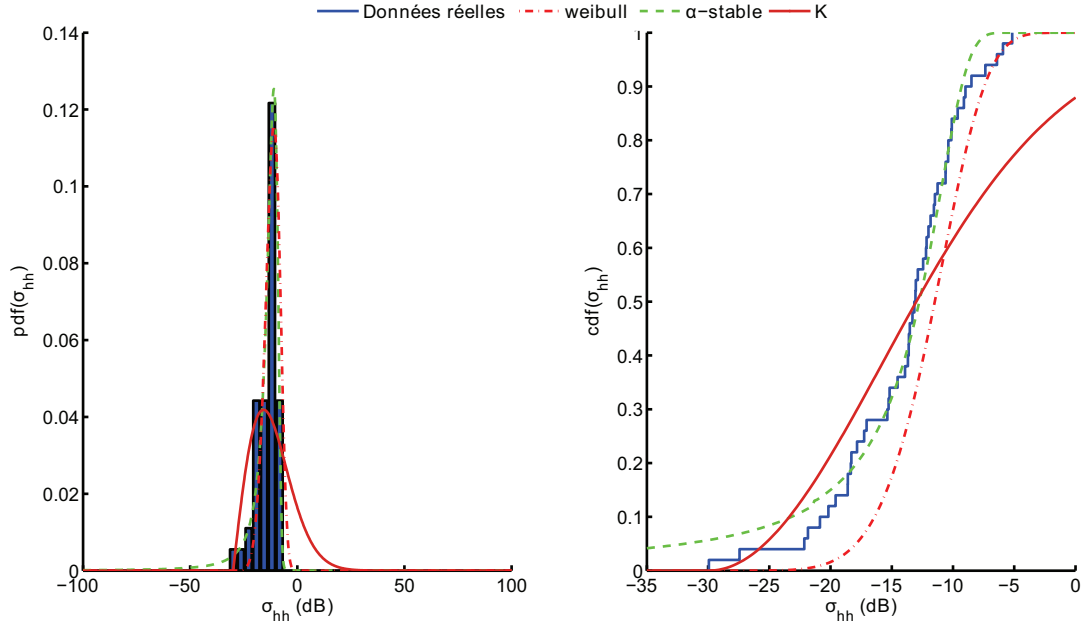
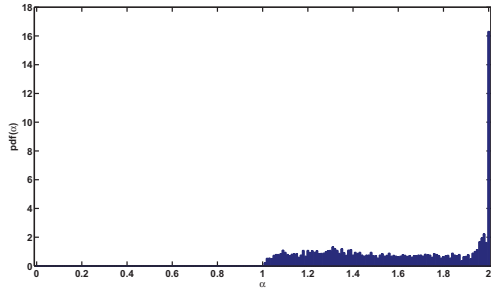
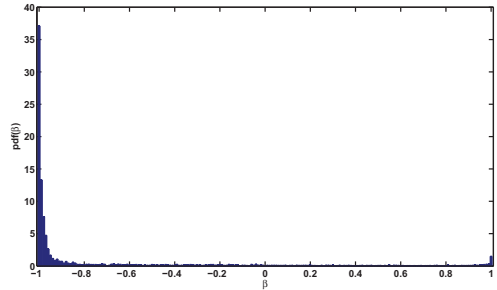


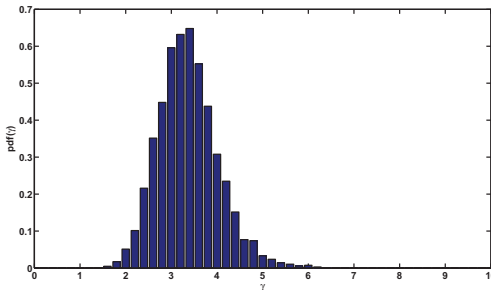
FIGURE 4.27 – Représentations de la densité de probabilité et de la fonction de répartition du champ diffusé ainsi que de leurs estimations par les lois de Weibull,  $\mathcal{K}$  et  $\alpha$ -stable pour une polarisation HH,  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\theta_s = 60^\circ$ ,  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_s = 0^\circ$ , une direction du vent  $\phi = 0^\circ$  et une vitesse du vent  $v = 3$  m/s.



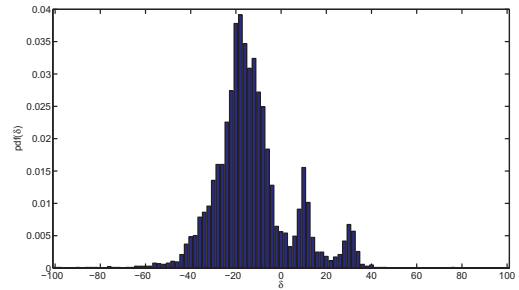
(a) Densité de probabilité du paramètre  $\alpha$ .



(b) Densité de probabilité du paramètre  $\beta$ .



(c) Densité de probabilité du paramètre  $\gamma$ .



(d) Densité de probabilité du paramètre  $\delta$ .

FIGURE 4.28 – Densité de probabilité des paramètres de la distribution  $\alpha$ -stable estimés pour la configuration adoptée.

les sections suivantes ont été décrits dans [77].

#### 4.4.2.2.a Paramètre $\alpha$

Nous nous intéressons ici à l'influence des paramètres du vent (vitesse et direction) et de polarisation sur le paramètre  $\alpha$  des distributions  $\alpha$ -stables. Nous superposons les densités de probabilité de l'exposant caractéristique  $\alpha$  des 24 configurations sur un même graphe (Figure 4.29). La valeur la plus probable pour l'exposant caractéristique est 2. Les autres valeurs sont distribuées uniformément dans  $[1; 2[$ . Nous remarquons que les courbes se superposent quelque soit la polarisation, la vitesse du vent et la direction du vent. Il est donc difficile de remonter aux paramètres environnementaux avec l'exposant caractéristique.

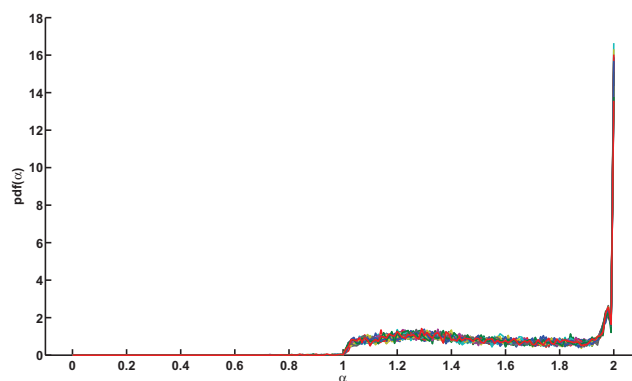


FIGURE 4.29 – Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre  $\alpha$ .

#### 4.4.2.2.b Paramètre $\beta$

Comme pour le paramètre  $\alpha$ , nous superposons les densités de probabilités du paramètre d'asymétrie  $\beta$  des 24 configurations sur un même graphe (Figure 4.30). La valeur la plus probable pour le paramètre d'asymétrie est -1. Les autres valeurs appartiennent à l'intervalle  $]-1; -0,8]$ . La densité de probabilité du paramètre  $\beta$  est indépendante de la polarisation, de la direction du vent et de la vitesse du vent. Le paramètre d'asymétrie permet difficilement de remonter aux paramètres environnementaux d'acquisition.

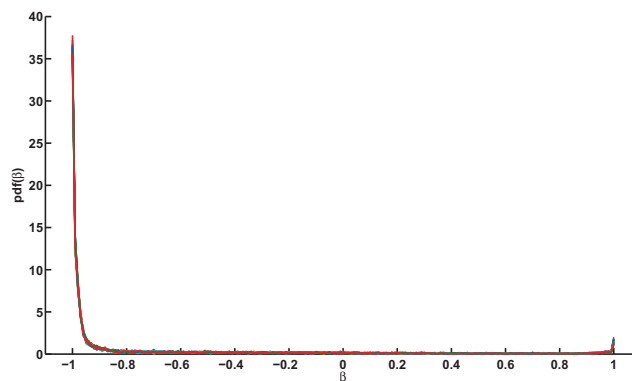


FIGURE 4.30 – Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre  $\beta$ .

#### 4.4.2.2.c Paramètre $\gamma$

La même méthodologie employée pour caractériser l'exposant caractéristique et le paramètre d'asymétrie est utilisée pour analyser le comportement du paramètre de dispersion  $\gamma$ . Le paramètre de dispersion est reparti de manière gaussienne dans  $[1,5;5,5]$  avec 3.5 la valeur la plus probable. Lorsque nous superposons les densités de probabilités des 24 configurations (Figure 4.31), on remarque que la densité de probabilité du paramètre  $\gamma$  est indépendante de la direction du vent, de la vitesse du vent et de la polarisation. Il est donc difficile de remonter aux paramètres environnementaux avec le paramètre de dispersion.

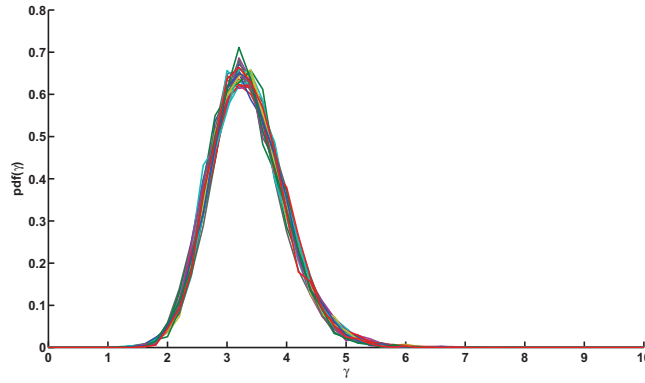


FIGURE 4.31 – Superposition des 24 densités de probabilité pour le paramètre  $\gamma$ .

#### 4.4.2.2.d Paramètre $\delta$

**Influence de la polarisation** Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'influence de la polarisation sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  des distributions  $\alpha$ -stables. Nous fixons pour cela la vitesse du vent à 3 m/s et la direction du vent à  $0^\circ$ . On remarque que les polarisations croisées (HV et VH) et les polarisations directes (HH et VV) ont le même comportement (Figure 4.34). Il est possible de distinguer les polarisations HV et VH entre elles. En effet, les modes des distributions sont décalés. Pour les polarisations directes, on remarque que la densité de probabilité comporte 3 modes (ces 3 modes ont été expliqués dans la partie précédente). Cependant, les deux plus petits modes ne sont pas localisés au même endroit.

**Influence de la vitesse du vent** Pour analyser l'influence de la vitesse du vent, nous fixons la polarisation et la direction du vent. Tout d'abord, nous considérons une polarisation HH et une direction du vent  $\phi = 0^\circ$  (Figure 4.35). Nous remarquons qu'il est possible de distinguer les vitesses du vent de 3 m/s et 5 m/s. Tout d'abord, on remarque un mode commun pour des vitesses du vent de 3 m/s et 5 m/s à -18 qui présente les valeurs les plus probables de  $\delta$ . Ensuite, on observe deux modes plus petits que le premier mode décrit précédemment. En effet, la courbe avec la vitesse du vent de 3 m/s présente deux modes séparés aux valeurs de  $\delta$  de 12 et 32. Dans le cas d'une vitesse du vent de 5 m/s, les deux modes s'intercalent entre ceux observés pour une vitesse du vent de 3 m/s aux valeurs de  $\delta$  de 18 et 28. Le plus petit mode correspond aux valeurs de  $\delta$  où  $\theta_i = \theta_s$ . Il est possible de faire la même analyse pour une direction du vent de  $\phi = 25^\circ$  et  $\phi = 60^\circ$ .

Dans le cas d'une polarisation HH, l'analyse est similaire à celle effectuée pour une polarisation VV. Cependant, les modes ne se situent pas au même endroit. Dans le cas d'une vitesse du



vent de 3 m/s, le plus petit mode se situe pour une valeur de  $\delta = 30$  et le mode intermédiaire se situe à une valeur de  $\delta = 10$ . Dans le cas d'une vitesse du vent de 5 m/s, le plus petit mode se trouve à une valeur de 16 et le mode intermédiaire se trouve à  $\delta = 26$ .

Dans le cas des polarisations croisées (VH et HV), l'analyse est différente. En effet, on observe deux modes contre trois modes précédemment. Ensuite, la représentation de la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  ressemble à une Gaussienne mais avec une excroissance prononcée surtout pour la polarisation VH. Lorsqu'on observe la représentation de la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  pour la polarisation HV et une direction du vent donnée, on remarque que la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  obtenue pour une vitesse du vent de 3 m/s est inférieure à la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  obtenue pour une vitesse du vent de 5 m/s pour des valeurs de  $\delta$  comprise entre -40 et -20. Le constat est plus difficile à faire pour la polarisation VH. En effet, le plus petit mode est difficile à distinguer et la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  obtenue pour une vitesse du vent de 3 m/s est légèrement inférieure à la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  obtenu pour une vitesse du vent de 5 m/s pour des valeurs de  $\delta$  comprise entre -40 et -20.

**Influence de la direction du vent** Pour observer l'influence de la direction du vent sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$ , nous fixons la polarisation et la vitesse du vent. Nous choisissons un exemple avec une polarisation VV et une vitesse du vent de 5 m/s. Nous remarquons la présence de 3 modes à -18, 18 et 28, et ça quelque soit la direction du vent (Figure 4.36). Le problème est que les courbes se superposent indépendamment de la direction du vent. Le constat est similaire pour une vitesse du vent de 3 m/s. Dans le cas d'une polarisation HH, le constat est le même que pour la polarisation VV sauf que les modes ne se situent pas au même endroit. Dans le cas d'une polarisation VH, nous n'observons que deux modes contre trois précédemment. Les courbes se superposent quelque soit la direction du vent. Dans le cas d'une polarisation HV, nous observons qu'un seul mode et les représentations des densité de probabilité du paramètre  $\delta$  se superposent.

Par conséquent, la représentation de la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  est indépendante de la direction du vent.

#### 4.4.2.3 Détection

Afin d'évaluer l'influence du modèle d'estimation de la distribution du champ diffusé par une surface maritime, dans cette partie, nous développons et présentons les premiers résultats obtenus dans une problématique de détection d'une cible placée sur une surface maritime. La démarche suivie correspond à celle utilisée par Ward *et al.* [227] (pages 168-169). La configuration géométrique adoptée est illustrée par la Figure 4.32. Nous supposons que l'état de mer est faible, allant de 2 à 3 sur l'échelle de Beaufort (c'est-à-dire des vitesses du vent de 1,6 m/s à 5,4 m/s). La densité de probabilité de la surface équivalente radar de la surface maritime, notée  $P_A$ , est caractérisée par des phénomènes de queues lourdes et d'asymétrie comme le montre les résultats obtenus dans la section 4.4.2.2. Par conséquent, la distribution  $\alpha$ -stable semble la plus appropriée pour modéliser la surface équivalente radar de la surface maritime. Nous choisissons de travailler avec une vitesse du vent  $v = 3$  m/s et une polarisation HH. La direction du vent n'influe pas sur la densité de probabilité des paramètres de la loi  $\alpha$ -stable : nous fixons arbitrairement la direction du vent  $\phi = 0^\circ$ . D'après la section 4.4.2.2, la valeur la plus probable pour l'exposant caractéristique est  $\alpha = 2$ , pour le paramètre d'asymétrie  $\beta = -1$ , pour le paramètre de dispersion  $\gamma = 3.5$  et pour le paramètre de position  $\delta = 45$  (la valeur 45 correspond à une configuration  $\theta_i = \theta_s$ ). L'hypothèse "la surface équivalente radar de la surface maritime est modélisée par une distribution  $\alpha$ -stable" est vérifiée par le test de Kolmogorov-Smirnov.

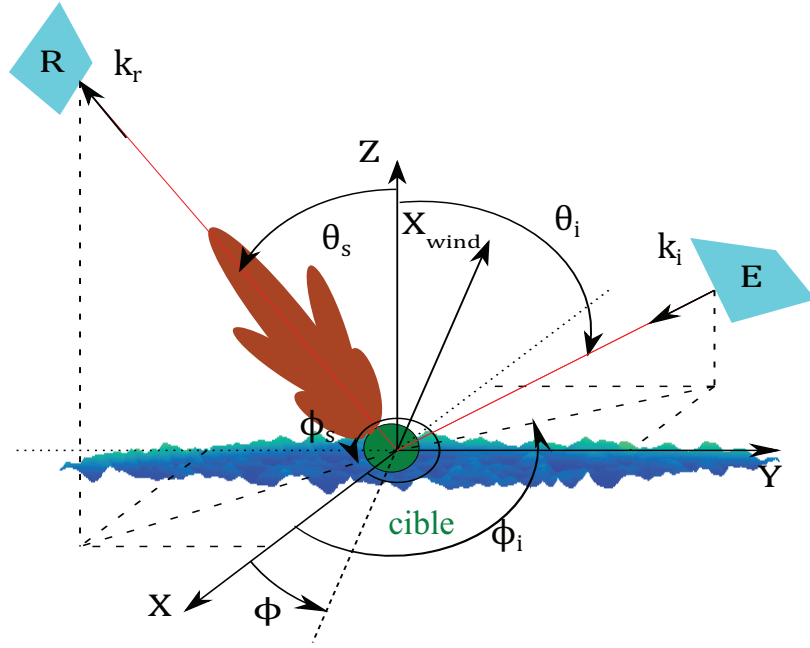


FIGURE 4.32 – Configuration géométrique d’observation définissant les angles bistatiques.

Nous supposons qu’une partie de la densité de probabilité de la surface équivalente radar de la cible est recouverte par la densité de probabilité de la surface équivalente de la surface maritime (Figure 4.33(a)). La densité de probabilité de la surface équivalente radar de la cible, notée  $P_T$ , est caractérisée par des phénomènes de queues lourdes et par conséquent peuvent être modélisées par des distributions  $\alpha$ -stables. Les valeurs de la loi  $\alpha$ -stable sont choisies arbitrairement et valent  $S_2(-1, 1, 49)$ . L’hypothèse “la surface équivalente radar de la cible est modélisée par une distribution  $\alpha$ -stable” est vérifiée par le test de Kolmogorov-Smirnov. À un seuil fixé  $Z_s$ , les probabilités de détection, notée  $P_D$ , et de fausse alarme, notée  $P_{FA}$ , sont déterminées par :

$$P_D = \int_{Z_s}^{+\infty} P_T(z) dz, P_{FA} = \int_{Z_s}^{+\infty} P_A(z) dz \quad (4.97)$$

À titre de comparaison, la distribution  $\mathcal{K}$  est utilisée pour estimer les coefficients de diffusion de la surface maritime. Nous représentons la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme (que l’on appelle couramment courbe de Caractéristiques Opérationnelles de réception (courbe COR)) pour les deux hypothèses.

En terme de performances de détection, le modèle  $\alpha$ -stable offre une meilleure détection que le modèle  $\mathcal{K}$  (Figure 4.33(b)). Par conséquent, l’impact de l’erreur d’estimation des distributions sur les performances de détection n’est pas négligeable si le modèle n’est pas approprié aux données.

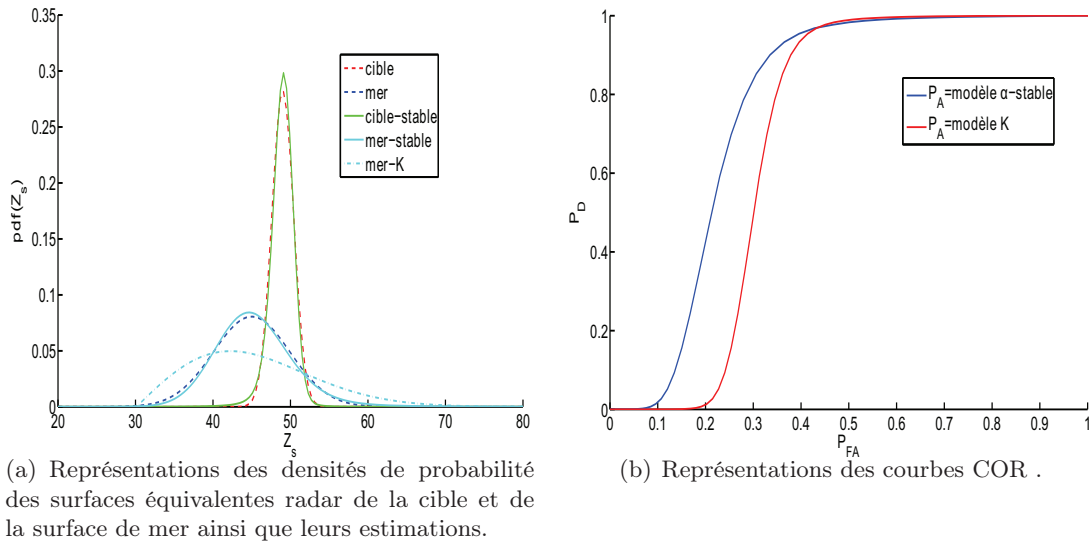


FIGURE 4.33 – Représentation des densités de probabilité et des courbes COR suivant les modèles d’estimation de la densité de probabilité de la surface équivalente radar de la surface maritime.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une approche statistique à partir d’un modèle  $\alpha$ -stable afin de caractériser le fouillis de mer. Tout d’abord, il a été nécessaire de se constituer une base de données de coefficients de diffusion électromagnétique. Puisque nous n’avions pas à notre disposition de données réelles, cette base de données a été constituée à partir de coefficients de diffusion de surfaces de mer générées. L’approche spectrale (la plus utilisée dans la littérature) a été adoptée pour générer une surface de mer. Pour ce faire, nous avons utilisé le spectre d’Elfouhaily *et al.* car ce spectre permet d’obtenir une surface de mer réaliste. En effet, ce spectre prend en considération la vitesse de vent et la direction du vent ainsi que la notion de *fetch*. Il a été nécessaire ensuite de calculer le coefficient de diffusion d’une surface de mer générée. Il existe plusieurs familles permettant le calcul d’un coefficient de diffusion : les méthodes numériques et les méthodes asymptotiques. L’avantage des méthodes numériques est qu’elles sont exactes, mais l’inconvénient est que les temps de calcul sont élevés. Par conséquent, nous avons utilisé les méthodes asymptotiques. Nous avons ainsi opté pour l’optique physique du fait de sa simplicité de programmation.

À partir des coefficients de diffusion, nous avons construit des histogrammes représentés par une densité de probabilité des coefficients de diffusion. La caractérisation statistique de l’amplitude du fouillis de mer exprimé en linéaire est généralement réalisée à partir de distributions de Weibull et  $\mathcal{K}$ . Nous nous focalisons sur une famille de lois permettant de prendre en compte les phénomènes de queue lourde appelée distributions  $\alpha$ -stables que nous comparons aux lois citées précédemment. Dans notre étude, nous avons considéré l’amplitude du champ diffusé par une surface maritime exprimée en dB. Nous avons utilisé un test de Kolmogorov-Smirnov afin d’évaluer la qualité de chaque modèle. Nous nous sommes aperçus que le pourcentage de succès du test de Kolmogorov était d’environ de 10 % pour l’hypothèse “les données suivent un loi  $\mathcal{K}$ ” et d’environ 50 % pour l’hypothèse “les données suivent une loi de Weibull”. Le pourcentage de succès du test de Kolmogorov-Smirnov est quand à lui plus élevé puisqu’il approche les 97 % dans le cas de l’hypothèse “Les données suivent une loi  $\alpha$ -stable” : il convient donc d’utiliser le modèle  $\alpha$ -stable pour modéliser les données.

Nous avons ensuite calculé un intervalle de confiance pour chaque paramètre des distributions

$\alpha$ -stables en fonction de la géométrie du problème ( $\theta_i$  et  $\theta_s$ ). Le problème est qu'il est difficile d'extraire de l'information de ces intervalles de confiance. Par conséquent, nous construisons la densité de probabilité des paramètres des distributions  $\alpha$ -stables. Nous observons ensuite l'influence sur ces paramètres de la polarisation, de la vitesse de vent et de la direction du vent. Il s'avère que les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ne permettent pas de discriminer les configurations entre elles car les densités de probabilité se superposent indépendamment de la polarisation, de la vitesse de vent et de la direction de vent. Il est donc difficile de remonter aux paramètres environnementaux à partir des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Il n'y a que le paramètre  $\delta$  qui permet de discriminer les densités de probabilités suivant la polarisation et la vitesse de vent. En effet, nous avons pu observer que la direction du vent n'avait pas d'influence sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$  puisque les densités de probabilité se superposent. Ensuite, les polarisations directes permettent d'avoir des densités de probabilité avec trois modes tandis que les polarisations croisées permettent d'avoir un ou deux modes. Il est possible de distinguer les polarisations entre elles à vitesse du vent et direction du vent fixées. La vitesse du vent permet aussi de distinguer les différentes configurations entre elles à polarisation et vitesse du vent fixées. Par conséquent, le paramètre  $\delta$  s'avère le plus discriminant et permet de distinguer les différentes configurations entre elles (polarisation et vitesse du vent).

Plusieurs perspectives sont offertes à ce travail. L'une des premières porte sur l'utilisation d'autres modèles de diffusion électromagnétiques (modèle à deux échelles [114] et l'approximation des petites pentes [10]). Une autre importante serait de considérer une surface maritime hétérogène (polluant, cible, déferlement) [19]. Dans ce cas, il faudrait alors faire l'étude des paramètres des distributions  $\alpha$ -stables et examiner la différence avec les paramètres calculés à partir d'une surface de mer sans objet.

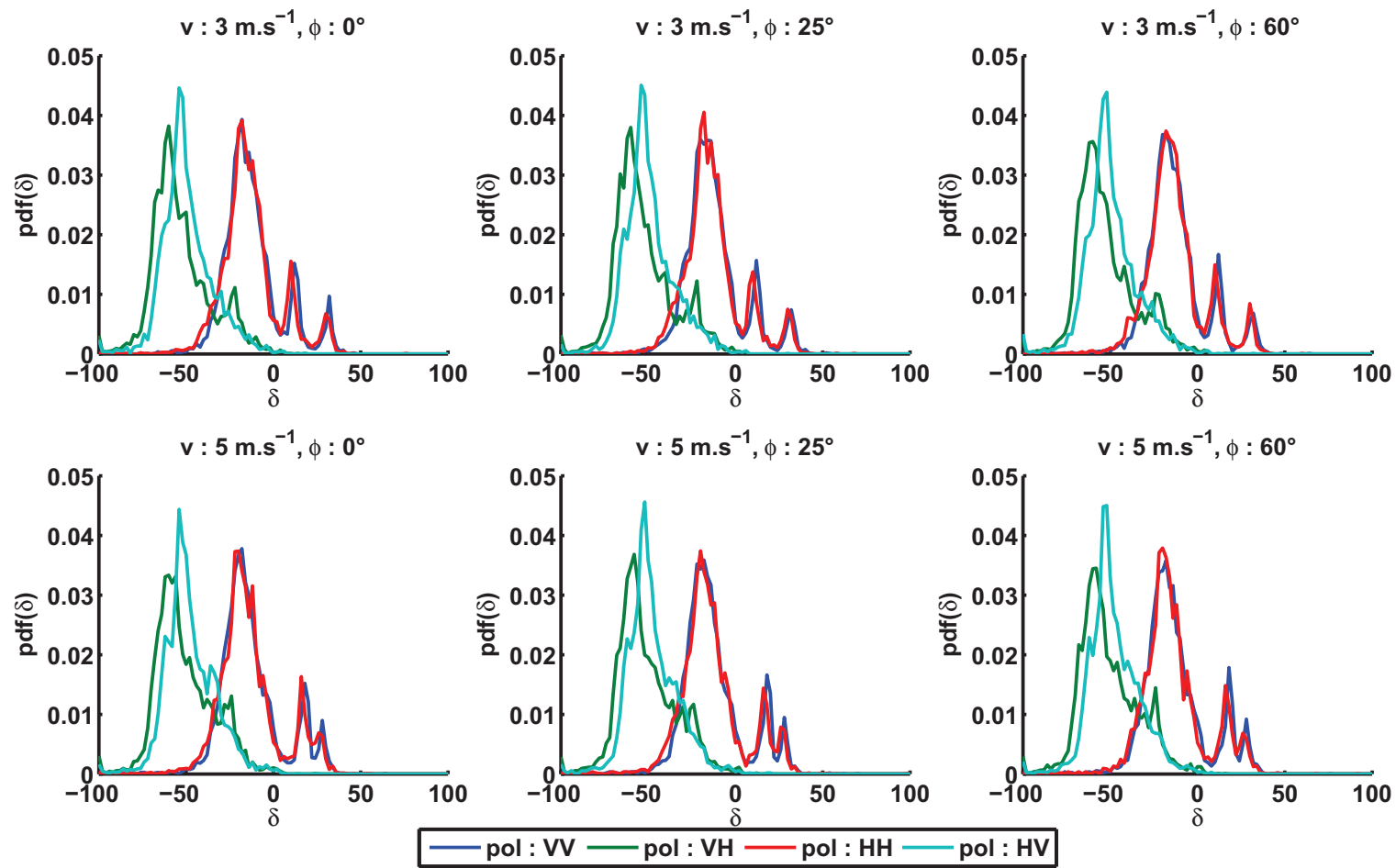


FIGURE 4.34 – Influence de la polarisation de l'onde sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$ .

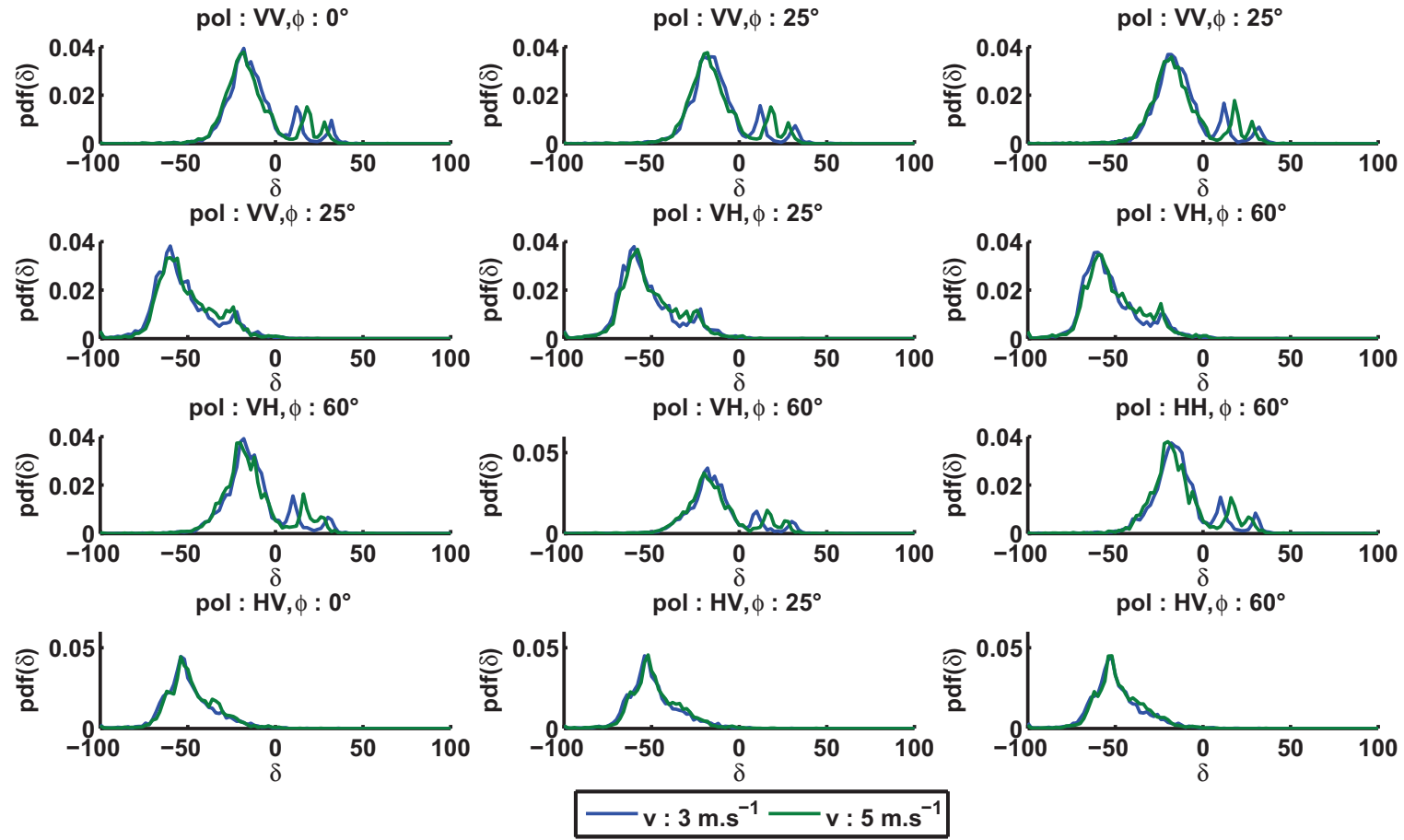


FIGURE 4.35 – Influence de la vitesse du vent sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$ .

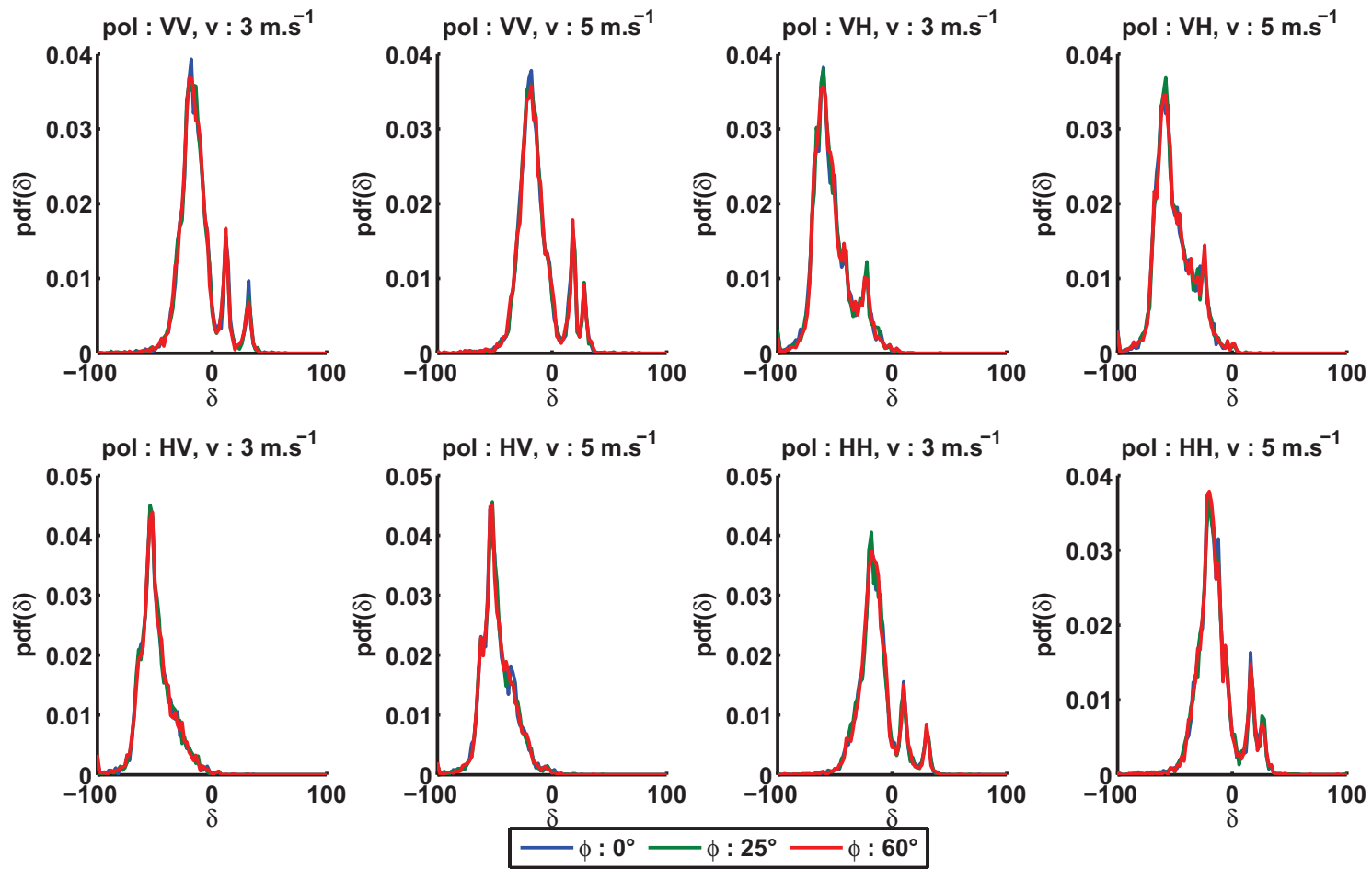


FIGURE 4.36 – Influence de la direction du vent sur la densité de probabilité du paramètre  $\delta$ .

# Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire a porté sur la caractérisation statistique de phénomènes aléatoires et de processus stochastiques issus de la perception et l'observation de l'environnement maritime. Il est possible de rencontrer ces différents phénomènes dans de nombreux domaines notamment dans la caractérisation de fonds marins dans une problématique d'exploration pétrolière et la caractérisation du fouillis de mer dans une optique de surveillance maritime. Les processus rencontrés sont non-Gaussiens et présentent les caractéristiques de queue lourde et d'asymétrie. Dans la littérature, il existe de nombreuses distributions permettant de prendre en compte ces caractéristiques : loi  $\mathcal{K}$ , loi de Weibull, loi log-normale... L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation d'une classe de distributions appelée loi  $\alpha$ -stable, dont la loi normale, la loi de Cauchy et la loi de Lévy sont des cas particuliers.

Tout d'abord, il a été nécessaire d'introduire la notion de capteurs (radar et sonar) permettant de faire l'acquisition des données. Dans le cas de l'application sonar, nous considérons sur le signal brut acquis par un sondeur monofaisceau à partir duquel plusieurs attributs vont être calculés. Dans le cas de l'application radar, les données correspondent aux coefficients de diffusion électromagnétique d'une surface maritime. L'une des étapes importantes va être de traiter et donc de caractériser ces données. Nous nous dirigeons vers une modélisation statistique qui a l'avantage d'être étendue en temps réel contrairement aux modèles physiques. Les données sont ensuite ramenées à une densité de probabilité à partir d'un histogramme. Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer une distribution  $\alpha$ -stable : méthode utilisant la fonction caractéristique, méthode des quantiles et méthode par maximum de vraisemblance. Le problème avec ces méthodes est qu'elles sont peu efficaces lorsque le nombre d'échantillons est bas. Par conséquent, nous avons développé un algorithme par moindres carrés étendu aux lois  $\alpha$ -stables qui présente l'avantage de minimiser l'erreur quadratique.

Pour la caractérisation de fonds marins, nous avons à notre disposition de nombreux attributs qui n'apportent pas la même information. En effet, chaque paramètre va apporter un degré de confiance sur une classe. Ce phénomène engendre donc de l'incertitude et de l'imprécision. Nous nous dirigeons alors vers une théorie de l'incertain permettant de prendre en compte ces contraintes. Nous utilisons plus particulièrement la théorie des fonctions de croyance dont le formalisme est facile à manipuler. La théorie des fonctions de croyance initiée par Dempster a été développée dans le chapitre 3. Smets a étendu le formalisme des fonctions de croyance discrètes aux nombres réels permettant ainsi d'attribuer des fonctions de masse à des intervalles. Pour notre étude, il a été nécessaire de calculer la fonction de plausibilité dans le cas d'une densité de probabilité d'une distribution  $\alpha$ -stable. Nous avons comparé l'approche par le formalisme des fonctions de croyance avec des méthodes couramment utilisées telles que l'approche Bayésienne et la méthode des  $k$  plus proches voisins. Cette étude a tout d'abord été appliquée à des données générées. Dans le cas où les données sont Gaussiennes, les modèles Gaussiens et  $\alpha$ -stables se valent ce qui est tout à fait logique puisque la loi normale est un cas particulier des distributions  $\alpha$ -stables. Ensuite, l'approche Bayésienne est la moins performante lorsqu'on la compare à la méthode des  $k$  plus proches voisins et à l'approche par des fonctions de croyance. Le passage à



un espace à deux dimensions a pour effet d'augmenter les taux de classification de la méthode par la théorie des fonctions de croyance. Dans le cas de données générées par un modèle  $\alpha$ -stable, il est tout à fait normal d'observer que le modèle  $\alpha$ -stable donne des résultats significativement meilleurs que le modèle Gaussien. En effet, le test de Kolmogorov-Smirnov n'est pas toujours vérifié pour l'hypothèse Gaussienne. L'approche Bayésienne est significativement moins performante que la méthode des  $k$  plus proche voisins et la méthode des fonctions de croyance. L'un des avantages de la théorie des fonctions de croyance est qu'elle ne fait pas intervenir la notion d'*a priori*. Il est important de noter que le choix des attributs est primordiale pour avoir une bonne classification. Il n'y a pas de recettes miracles pour le choix des attributs et ce choix dépend beaucoup de l'intuition et de l'expérience de l'opérateur : on fait en sorte que dans l'espace des réalisations, il est possible de différencier les classes entre elles.

Dans le chapitre 4, nous avons caractérisé le fouillis de mer à partir des distributions  $\alpha$ -stables. Tout d'abord, il a été nécessaire de générer les surfaces de mer à partir d'une méthode spectrale. Plusieurs spectres ont été proposés dans la littérature tels que le spectre de Pierson et Moskowitz, le spectre de JONSWAP, le spectre de Fung et Lee, mais nous avons retenu celui développé par Elfouhaily. En effet, ce spectre est celui qui permet le mieux de prendre en compte les caractéristiques environnementales telles que la vitesse du vent, la direction du vent et le fetch. Une des étapes importantes est de déterminer le coefficient de diffusion de la surface maritime générée. Il existe dans la littérature plusieurs méthodes issues de deux principales familles : les méthodes numériques et les méthodes asymptotiques. Nous n'utilisons pas les méthodes numériques car le temps de calcul est coûteux. Par conséquent, nous utilisons l'optique physique qui est répertoriée parmi les méthodes asymptotiques. Nous avons comparé le modèle  $\alpha$ -stable avec d'autres méthodes permettant de prendre en compte les caractéristiques de queue lourde des densités de probabilité : la loi  $\mathcal{K}$  et la loi de Weibull. Le test de Kolmogorov-Smirnov a permis de conclure que le modèle  $\alpha$ -stable permettait d'ajuster beaucoup mieux les données exprimées en décibel que la loi  $\mathcal{K}$  et la loi de Weibull. Nous avons ensuite représenté les intervalles de confiance des paramètres estimés en fonction de la géométrie d'observation. Le problème de cette représentation est qu'il est difficile d'en extraire de l'information. Nous avons donc opté pour une autre représentation en construisant la densité de probabilité des paramètres estimés. Dans notre étude, nous avons remarqué que l'exposant caractéristique  $\alpha$ , le paramètre d'asymétrie  $\beta$  et le paramètre de dispersion  $\gamma$  n'étaient pas pertinents pour remonter aux paramètres environnementaux puisque les densités de probabilité des différentes configurations se superposent. Le seul paramètre pertinent est le paramètre de position  $\delta$ . La polarisation et la vitesse de vent permettent de distinguer les différentes configurations entre elles. Le paramètre direction de vent n'a pas d'influence puisque les densités de probabilité des différentes configurations se superposent. En terme de performances de détection, nous avons remarqué que l'erreur d'estimation des distributions avait une influence non négligeable sur la détection et est augmentée lorsque le modèle d'estimation n'est pas approprié aux données.

## 4.6 Perspectives

Dans le cas de l'application sonar, nous n'avons considéré qu'un seul type de capteur pour réaliser la classification : le sondeur monofaisceau. Dans l'avenir, nous pensons qu'il serait intéressant d'effectuer de la classification à partir de plusieurs sources comme un sonar latéral : les taux de classification pourraient être modifiés. Nous avons aussi remarqué que les distributions  $\alpha$ -stables n'avaient pas en général d'expression analytique (sauf Gauss, Cauchy et Lévy). Ce problème a pour effet d'augmenter les temps de calculs. Les calculs dans cette thèse ont été réalisés en langage Matlab. Nous pensons qu'il serait utile de développer le code dans un langage compilé (C/C++). La même conclusion est à faire pour la généralisation des distributions  $\alpha$ -stables dans

$\mathbb{R}^d$ . En effet, la mesure spectrale est discrète et la densité de probabilité est calculée à partir d'un maillage de  $\mathbb{R}^d$ . L'espace mémoire de Matlab a tendance à être saturé rapidement suivant la discrétisation choisie. Ensuite, nous avons utilisé la théorie des fonctions de croyance pour effectuer la classification. Cependant, il existe d'autres théories de l'incertain comme les probabilités imprécises et la théorie des possibilités. Il serait intéressant de programmer ces méthodes et de comparer les résultats obtenus avec la théorie des fonctions de croyance.

Dans le cas de l'application radar, une étude sur des données réelles semblerait être pertinente pour valider nos résultats. Une des pistes de travail serait d'effectuer la même étude avec un objet placé sur la surface générée. Il faudrait alors mettre en oeuvre une méthode de calcul autre que l'optique physique et permettant de prendre en compte les diffractions des bords de l'objet. Cette étude a un cadre applicatif comme par exemple la détection d'un hors-bord dans le cas d'une lutte anti-drogue ou la détection d'une nappe de pétrole dans le cas d'une lutte anti-pollution. D'un point de vue pratique, il serait intéressant de pouvoir implémenter la notion de distribution du clutter de mer dans une architecture radar afin d'effectuer la détection d'un objet.

Enfin, les distributions  $\alpha$ -stables font partie d'une famille de lois apparue dans les années 20, que nous qualifions de loi "jeune". Les lois  $\alpha$ -stables ont été très peu utilisées jusqu'à l'amélioration des capacités des ordinateurs. Récemment, leur utilisation a explosé dans de nombreux domaines comme en témoigne la bibliographie de Nolan [164]. Nous pensons que les lois  $\alpha$ -stables ont encore de beaux jours devant elles.



## Annexe A

# Lien entre la loi $\mathcal{K}$ composée et la loi $\mathcal{K}$ généralisée

Cette annexe permet de faire le lien entre deux paramétrisations de la loi  $\mathcal{K}$ . Initialement, elle a été introduite par Jakeman et Pusey [106] pour modéliser du fouillis de mer. L'expression de la densité de probabilité d'une distribution  $\mathcal{K}$  à trois paramètres est la suivante :

$$f_{\mathcal{K}(L,\nu,\mu)}(x) = \frac{2}{x} \left( \frac{L\nu x}{\mu} \right)^{\frac{L+\nu}{2}} \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(\nu)} K_{\nu-L} \left( 2 \left( \frac{L\nu x}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.1})$$

avec  $\nu \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $L \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Il est possible de la trouver avec deux paramètres en posant  $L = 1$  :

$$f_{\mathcal{K}(\nu,\mu)}(x) = \frac{2}{x} \left( \frac{\nu x}{\mu} \right)^{\frac{1+\nu}{2}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} K_{\nu-1} \left( 2 \left( \frac{\nu x}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.2})$$

En rentrant le terme isolé en  $x$  dans la racine carrée, on obtient aussi :

$$f_{\mathcal{K}(\nu,\mu)}(x) = \frac{2\nu}{\Gamma(\nu)\mu} \left( \frac{\nu x}{\mu} \right)^{\frac{\nu-1}{2}} K_{\nu-1} \left( 2 \left( \frac{\nu x}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (\text{A.3})$$

On pose  $u = x^{\frac{1}{2}}$  et  $1/a = 2\sqrt{\nu/\mu}$ , il faut faire attention lorsque l'on fait le changement de variable (propriété 1.3.2) car :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(u)2udu \quad (\text{A.4})$$

On obtient alors la densité après le changement de variable :

$$f_{\mathcal{K}(\nu,\mu)}(u) = \frac{2}{a\Gamma(\nu)} \left( \frac{u}{2a} \right)^{\nu} K_{\nu-1} \left( \frac{u}{a} \right) \quad (\text{A.5})$$

Finalement en posant  $m = \nu - 1$ , on aura pour  $m > 1$  et  $a \in \mathbb{R}^{+*}$  la paramétrisation de la loi  $\mathcal{K}$  que l'on trouve dans [55] :

$$f_{\mathcal{K}(\nu,\mu)}(u) = \frac{2}{a\Gamma(m+1)} \left( \frac{u}{2a} \right)^{m+1} K_m \left( \frac{u}{a} \right) \quad (\text{A.6})$$

La distribution  $\mathcal{K}$  composée a une justification physique et s'obtient à partir du produit de deux composantes. La première contribution correspond à l'amplitude  $a_R$  des fluctuations rapides de la surface par une composante de Rayleigh :

$$f_{\mathcal{R}(\sigma^2=2a_c^2/\pi)}(a_R) = \frac{\pi a_R}{2a_c^2} \exp\left(-\frac{\pi a_R^2}{4a_c^2}\right) \quad (\text{A.7})$$

avec  $a_c$  représentant l'amplitude des fluctuations lentes de la surface où la quantité  $z = a_c^2$  est distribuée par une loi gamma :

$$f_{\Gamma(\nu,1/\sqrt{b})}(z = a_c^2) = \frac{b^{2\nu}}{\Gamma(\nu)} (z)^{\nu-1} \exp(-zb^2) \quad (\text{A.8})$$

D'après , l'amplitude de la distribution  $\mathcal{K}$  peut s'écrire :

$$f_{(\mu,a)}(x) = \int_0^{+\infty} f_{\mathcal{R}(\sigma^2=2a_c^2/\pi)}(a_R) f_{\Gamma(\nu,1/\sqrt{b})}(a_c) dy \quad (\text{A.9})$$

qu'il est possible de réécrire par :

$$f_{\mathcal{K}(\nu,a)}(x) = \frac{4c}{\Gamma(\nu)} (cx)^\nu K_{\nu-1}(2cx) \quad (\text{A.10})$$

Il est possible de retomber sur l'équation A.6 en posant le changement de variable  $u = 2x$ .

## Annexe B

# Calcul de la densité de probabilité d'une distribution $\alpha$ -stable

L'objectif de cette annexe est de présenter le calcul de la densité de probabilité d'une densité de probabilité  $\alpha$ -stable développée par Nolan [162]. La définition de la fonction caractéristique d'une distribution  $\alpha$ -stable donnée par Zolotarev [236] est la suivante :

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp(jt\delta - |\gamma t|^\alpha [1 + j\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)]) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp(jt\delta - |\gamma t| [1 + j\beta \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) \log |t|]) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec  $\alpha \in ]0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\delta \in \mathbb{R}$ .

La densité de probabilité est obtenue en effectuant une transformée de Fourier de la fonction caractéristique. Le problème est que les bornes sont infinies. Nolan propose d'effectuer les changements de variables suivants pour y parvenir en supposant que  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$  :

$$\zeta = \zeta(\alpha, \beta) = \begin{cases} -\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\beta_0 = \beta_0(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2})) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$V(\theta; \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos(\alpha\theta_0))^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\cos(\theta)}{\sin(\alpha(\theta_0 + \theta))} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha-1)\theta)}{\cos(\theta)} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left( \frac{\frac{\pi}{2} + \beta\theta}{\cos(\theta)} \right) \exp \left( \frac{1}{\beta} \left( \frac{\pi}{2} + \beta\theta \right) \tan(\theta) \right) & \text{si } \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

La densité de probabilité vaut pour  $\alpha \neq 1$  :

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha(x - \zeta)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi|\alpha - 1|} \int_{-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; \alpha, \beta) \exp\left(-(x - \zeta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta; \alpha, \beta)\right) d\theta & \text{pour } x > \zeta \\ \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha}) \cos(\theta_0)}{\pi(1 + \zeta^2)^{\frac{1}{2\alpha}}} & \text{pour } x = \zeta \\ f(-x; \alpha, -\beta) & \text{pour } x < \zeta \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , la densité de probabilité a pour expression :

$$f(x; 1, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} \exp\left(-\frac{\pi x}{2\beta}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta; 1, \beta) \exp\left(-\exp\left(\frac{\pi x}{2\beta}\right) V(\theta; 1, \beta)\right) d\theta & \text{pour } \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1 + x^2)} & \text{pour } \beta = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous avons supposé que  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ . Pour généraliser aux autres cas, il faut poser  $x = \frac{(x - \delta)}{\gamma}$ .

## Annexe C

# Tables d'estimation

### C.1 Tables de McCulloch

Dans cette annexe, nous présentons les tables décrites par McCulloch [149] permettant d'estimer les paramètres d'une distribution  $\alpha$ -stable à partir d'une méthode fondée sur le calcul de quantiles.

$\nu_\alpha$	$\nu_\beta$						
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1
2,439	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000	2,000
2,5	1,916	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924	1,924
2,6	1,808	1,813	1,829	1,829	1,829	1,829	1,829
2,7	1,729	1,730	1,737	1,745	1,745	1,745	1,745
2,8	1,664	1,663	1,663	1,663	1,676	1,676	1,676
3,0	1,563	1,560	1,553	1,548	1,547	1,547	1,547
3,2	1,484	1,480	1,471	1,460	1,448	1,438	1,438
3,5	1,391	1,386	1,378	1,364	1,337	1,318	1,318
4,0	1,279	1,273	1,266	1,250	1,210	1,184	1,150
5,0	1,128	1,121	1,114	1,101	1,067	1,027	0,973
6,0	1,029	1,021	1,014	1,004	0,974	0,935	0,874
8,0	0,896	0,892	0,887	0,883	0,855	0,823	0,769
10,0	0,818	0,912	0,806	0,801	0,780	0,756	0,691
15,0	0,698	0,695	0,692	0,689	0,676	0,656	0,595
25,0	0,593	0,590	0,588	0,586	0,579	0,563	0,513

TABLE C.1 – Estimées de  $\alpha$  en fonction de  $\nu_\alpha$  et  $\nu_\beta$ .



$\nu_\alpha$	$\nu_\beta$						
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1
2,439	0,000	2,160	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2,5	0,000	1,592	3,390	1,000	1,000	1,000	1,000
2,6	0,000	0,759	1,800	1,000	1,000	1,000	1,000
2,7	0,000	0,482	1,048	1,694	1,000	1,000	1,000
2,8	0,000	0,360	0,760	1,232	2,229	1,000	1,000
3,0	0,000	0,253	0,518	0,823	1,575	1,000	1,000
3,2	0,000	0,203	0,410	0,632	1,244	1,906	1,000
3,5	0,000	0,165	0,332	0,499	0,943	1,560	1,000
4,0	0,000	0,136	0,271	0,404	0,689	1,230	2,195
5,0	0,000	0,109	0,216	0,323	0,539	0,827	1,917
6,0	0,000	0,096	0,190	0,284	0,472	0,693	1,759
8,0	0,000	0,082	0,163	0,243	0,412	0,601	1,596
10,0	0,000	0,074	0,147	0,220	0,377	0,546	1,362
25,0	0,000	0,056	0,112	0,167	0,285	0,428	1,274

TABLE C.2 – Estimées de  $\beta$  en fonction de  $\nu_\alpha$  et  $\nu_\beta$ .

$\alpha$	$\beta$				
	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0
2,0	1,908	1,908	1,908	1,908	1,908
1,9	1,914	1,915	1,916	1,918	1,921
1,8	1,921	1,922	1,927	1,936	1,947
1,7	1,927	1,930	1,943	1,961	1,987
1,6	1,933	1,940	1,932	1,997	2,043
1,5	1,939	1,952	1,988	2,045	2,116
1,4	1,946	1,967	2,022	2,106	2,211
1,3	1,955	1,984	2,037	2,188	2,333
1,2	1,935	2,007	2,125	2,294	2,491
1,1	1,980	2,040	2,205	2,435	2,696
1,0	2,000	2,085	2,311	2,624	2,973
0,9	2,040	2,149	2,461	2,886	3,356
0,8	2,098	2,244	2,676	3,265	3,912
0,7	2,189	2,392	3,004	3,884	4,775
0,6	2,337	2,635	3,542	4,808	6,247
0,5	2,588	3,073	4,534	6,636	9,144

TABLE C.3 – Valeurs de la fonction  $\psi_3(\alpha, \beta)$

$\alpha$	$\beta$				
	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0
2,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1,9	0,000	-0,017	-0,032	-0,049	-0,064
1,8	0,000	-0,030	-0,061	-0,092	-0,123
1,7	0,000	-0,043	-0,088	-0,132	-0,179
1,6	0,000	-0,056	-0,111	-0,170	-0,232
1,5	0,000	-0,066	-0,134	-0,206	-0,283
1,4	0,000	-0,075	-0,154	-0,241	-0,335
1,3	0,000	-0,084	-0,173	-0,276	-0,390
1,2	0,000	-0,090	-0,192	-0,310	-0,447
1,1	0,000	-0,095	-0,208	-0,346	-0,508
1,0	0,000	-0,098	-0,223	-0,383	-0,576
0,9	0,000	-0,099	-0,237	-0,424	-0,652
0,8	0,000	-0,096	-0,250	-0,469	-0,742
0,7	0,000	-0,089	-0,262	-0,520	-0,853
0,6	0,000	-0,078	-0,272	-0,581	-0,977
0,5	0,000	-0,061	-0,279	-0,659	-1,198

TABLE C.4 – Valeurs de la fonction  $\psi_5(\alpha, \beta)$

## C.2 Tables de Koutrouvelis

Cette annexe permet de déterminer la valeur de  $K$  et  $L$  lors de l'estimation développée par Koutrouvelis. La valeur de  $K$  et  $L$  dépendent de la valeur de  $\alpha$  et du nombre d'échantillon.

	Nombre d'échantillon $n$		
$\alpha$	200	800	1600
1,9	9	9	10
1,5	11	11	11
1,3	22	16	14
1,1	24	18	15
0,9	28	22	18
0,7	30	24	20
0,5	86	68	56
0,3	134	124	118

TABLE C.5 – Nombre de point  $K$  optimal.

	Nombre d'échantillon $n$		
$\alpha$	200	800	1600
1,9	9	10	11
1,5	12	14	15
1,1	16	18	17
0,9	14	14	14
0,7	24	16	16
0,5	40	38	36
0,3	70	68	66

TABLE C.6 – Nombre de point  $L$  optimal.

## Annexe D

# Dérivées des densités de probabilité $\alpha$ -stables

L'objectif de cette annexe est de détailler les calculs permettant de déterminer les dérivées des distributions  $\alpha$ -stables symétriques par rapport aux paramètres  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . Tout ces calculs ont été présentés par Matsui et Takemura [147]. ces dérivées sont utiles notamment pour estimer les distributions  $\alpha$ -stables symétriques par une méthode par maximum de vraisemblance. Le problème est que l'expression des dérivées est lourde.

L'expression de la dérivée première par rapport au paramètre  $\delta$  est :

$$f_{\delta}(x; \alpha) = \frac{1}{x} f(x; \alpha) - \frac{\alpha^2 \text{sign}(\alpha - 1)}{\pi x^2 (\alpha - 1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\phi; \alpha, x) (1 - g(\phi; \alpha, x)) \exp(-g(\phi; \alpha, x)) d\phi \quad (\text{D.1})$$

avec  $g(\phi; \alpha, x) = \left( \frac{x \cos \phi}{\sin(\alpha \phi)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos(\alpha - 1)\phi}{\cos \phi}$ . La figure D.1 permet de représenter la dérivée de la densité de probabilité par rapport au paramètre  $\delta$ .

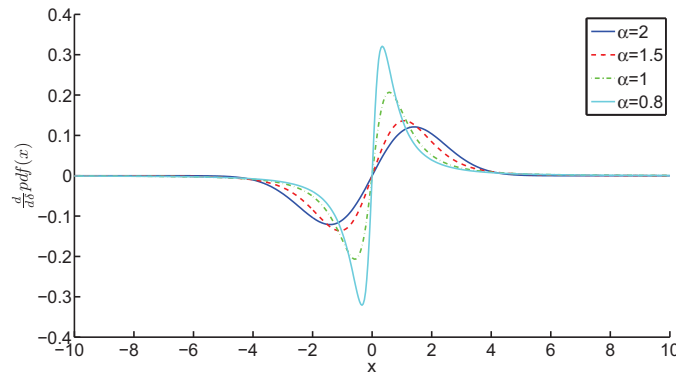


FIGURE D.1 – Dérivée de la pdf par rapport à  $\delta$  avec  $\gamma=1$  et  $\delta=0$ .

La dérivée première par rapport à  $\gamma$  a pour expression :

$$f_{\gamma}(x; \alpha) = -f(x; \alpha) + x f_{\delta}(x; \alpha) \quad (\text{D.2})$$

La représentation de la dérivée de la densité de probabilité par rapport au paramètre  $\gamma$  est donnée par la figure D.2.

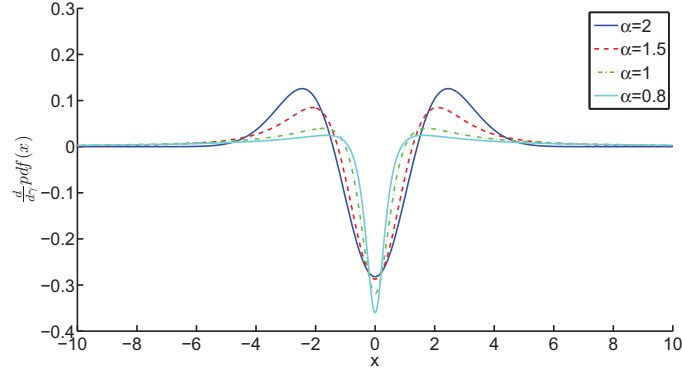


FIGURE D.2 – Dérivée de la pdf par rapport à  $\gamma$  avec  $\gamma=1$  et  $\delta=0$ .

Enfin, la dérivée première par rapport à  $\alpha$  est :

$$f_{\alpha}(x; \alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} f(x; \alpha) + \frac{\alpha}{\pi|\alpha-1|x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{\alpha}(\phi; \alpha, x) (1 - g(\phi; \alpha, x)) \exp(-g(\phi; \alpha, x)) d\phi \quad (\text{D.3})$$

avec  $g_{\alpha}(\phi; \alpha, x) = -g(\phi; \alpha, x)(h_1(\alpha) + h_2(\phi) + h_3(\phi))$ ,  $h_1(\phi) = \frac{1}{(\alpha-1)^2} \log \left| \frac{x \cos \phi}{\sin(\alpha\phi)} \right|$ ,

$h_2(\phi) = \frac{\alpha\phi}{(\alpha-1) \tan(\alpha\phi)}$  and  $h_3 = \phi \tan(\phi(\alpha-1))$ .

La figure D.3 permet de visualiser la représentation de la dérivée de la densité de probabilité par rapport au paramètre  $\alpha$ .

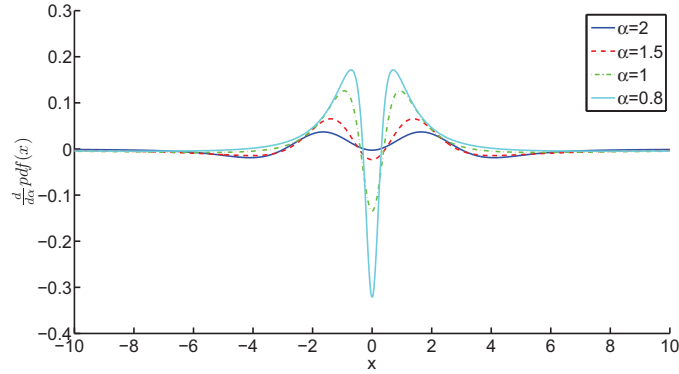


FIGURE D.3 – Dérivée de la pdf par rapport à  $\alpha$  avec  $\gamma=1$  et  $\delta=0$ .

## Annexe E

# Coefficients de diffusion

Le but de cette annexe est de détailler l'expression des coefficients de diffusion obtenus par l'approximation de Kirchhoff et la méthode des petites perturbations. L'expression des coefficients dépend notamment de la polarisation en émission  $p$  et de la polarisation en réception  $q$ .

### E.1 Approximation de Kirchhoff

Elle fait intervenir la notion d'intégrale surfacique. Cette notion a été introduite par Kirchhoff en 1882 et 1883. Il a démontré qu'il était possible d'exprimer le champ, en tout point d'un volume fini, en fonction des valeurs du champ et de sa dérivée normale sur la surface délimitant le volume. Le champ incident à la surface s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{p} E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{E.1})$$

avec  $\mathbf{p}$  représentant la polarisation de l'onde incidente et  $E_0$  le module du champ incident.

Stratton et Chu [210] étendent les travaux de Kirchhoff au cas vectoriel en utilisant le théorème de Green. Silver [199] obtient le champ diffusé en se plaçant dans la zone de Fraunhofer :

$$\mathbf{E}_{pq}^s = K \mathbf{n}_s \wedge \int [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} - \eta \mathbf{n}_s \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})] \exp(jk \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_s) ds \quad (\text{E.2})$$

avec :

- $\mathbf{E}$  le champ électrique total au point  $r$ .
- $\mathbf{H}$  le champ magnétique total au point  $r$ .
- $\mathbf{n}_s$  vecteur directeur du champ diffusé.
- $\mathbf{n}$  vecteur normal à la surface.
- $\mathbf{r}$  correspond au vecteur entre l'origine du repère et un point appartenant à la surface.
- $\eta$  représente l'impédance intrinsèque du milieu
- $K = -j \frac{k \exp(-jkR)}{4\pi R}$
- $R$  la distance entre le point d'observation du champ diffusé et le centre de la surface.

Le point de surface  $\mathbf{r}$  est muni d'un repère orthonormé  $(\mathbf{n}_i, \mathbf{d}, \mathbf{t})$  [121, 177] (Figure E.1) avec :

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{n}\|} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_i \wedge \mathbf{d} \quad (\text{E.4})$$

L'approximation de Kirchhoff suppose qu'en chaque point de la surface, l'interaction de l'onde

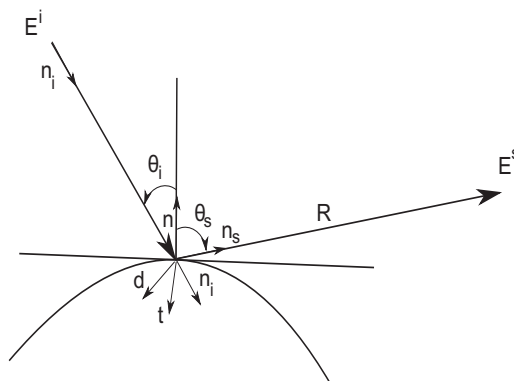


FIGURE E.1 – Approximation de Kirchhoff.

est identique à celle avec un plan infini, localement tangent à la surface [218]. Cette caractéristique lui vaut aussi l'appellation d'approximation du plan tangent. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont décomposés suivant leurs composantes verticale et horizontale  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_h + \mathbf{E}_v$  et  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_h + \mathbf{H}_v$ . Les relations de continuité du champ permettent d'écrire  $\mathbf{E}_h = \mathbf{E}_h^i + \mathbf{E}_h^s$ . La composante horizontale du champ électrique vaut  $\mathbf{E}_h^i = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{d} E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})$ . La composante horizontale du champ diffusé s'exprime à partir du coefficient de Fresnel horizontal  $R_h$  par  $\mathbf{E}_h^s = R_h(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{d} E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})$ . On obtient la composante horizontale du champ électrique par :

$$E_h = (1 + R_h)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{d} E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{E.5})$$

Le même raisonnement est effectué pour la composante verticale du champ électrique. La composante verticale du champ électrique incident vaut  $\mathbf{E}_v^i = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})$ . Le vecteur  $\mathbf{t}$  peut se réécrire par  $\mathbf{t} = \mathbf{n}_i \wedge \mathbf{d}$ . La composante verticale du champ diffusé peut alors s'écrire à partir du coefficient de réflexion verticale par  $\mathbf{E}_v^s = R_v(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t})(\mathbf{d} \wedge \mathbf{n}_i) E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})$ . On obtient la composante horizontale du champ électrique par :

$$E_v = (1 + R_v)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t})(\mathbf{d} \wedge \mathbf{n}_i) E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{E.6})$$

Les composantes du champ magnétique sont calculées en effectuant le même raisonnement. Les courants surfaciques ainsi obtenues s'expriment par :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = [(1 + R_h)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{n} \wedge \mathbf{d}) - (1 - R_v)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{d}] E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{E.7})$$

$$\eta(\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) = [(1 - R_h)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{d} + (1 + R_v)(\mathbf{n} \wedge \mathbf{d})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{t})] E_0 \exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{E.8})$$

On remarque qu'il faut calculer le produit mixte  $\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n}_i \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{n}_i - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{d}$  pour obtenir l'équation E.7. Le problème avec l'équation (E.2) est que l'intégrale est vectorielle. Il est possible de faire des hypothèses simplificatrices : le modèle de la phase stationnaire et l'approximation scalaire des champs. Le modèle de la phase stationnaire suppose que l'écart-type des hauteurs est grand. L'approximation scalaire des champs suppose que la surface est de faibles pentes avec un écart-type petit.

En sortant le terme  $\exp(-jk \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r})$  des équations (E.8), l'équation (E.2) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathbf{E}_{pq}^s = K \mathbf{n}_s \wedge \int [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} - \eta \mathbf{n}_s \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})] \exp(jk \mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i)) ds \quad (\text{E.9})$$

Le modèle de la phase stationnaire suppose que les seuls points qui contribuent à la diffusion sont les points spéculaires. L'équation permet de définir la phase  $Q$  par :

$$Q = k(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_i)) = q_x x + q_y y + q_z z(x, y) \quad (\text{E.10})$$

avec

$$q_x = k(\sin(\theta_s) \cos(\varphi_s) - \sin(\theta_i) \cos(\varphi_i)) \quad (\text{E.11})$$

$$q_y = k(\sin(\theta_s) \sin(\varphi_s) - \sin(\theta_i) \sin(\varphi_i)) \quad (\text{E.12})$$

$$q_z = k(\cos(\theta_s) + \cos(\theta_i)) \quad (\text{E.13})$$

La phase  $Q$  est dite stationnaire en un point si le taux de variation est nulle :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q_x + q_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = q_y + q_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (\text{E.15})$$

Or les quantités  $\frac{\partial z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial z}{\partial y}$  désignent les pentes de la surface suivant les directions  $x$  et  $y$  (notées  $Z_x$  et  $Z_y$ ). D'après l'équation (E.10), on obtient :

$$Z_x = -\frac{q_x}{q_z}, \quad Z_y = -\frac{q_y}{q_z} \quad (\text{E.16})$$

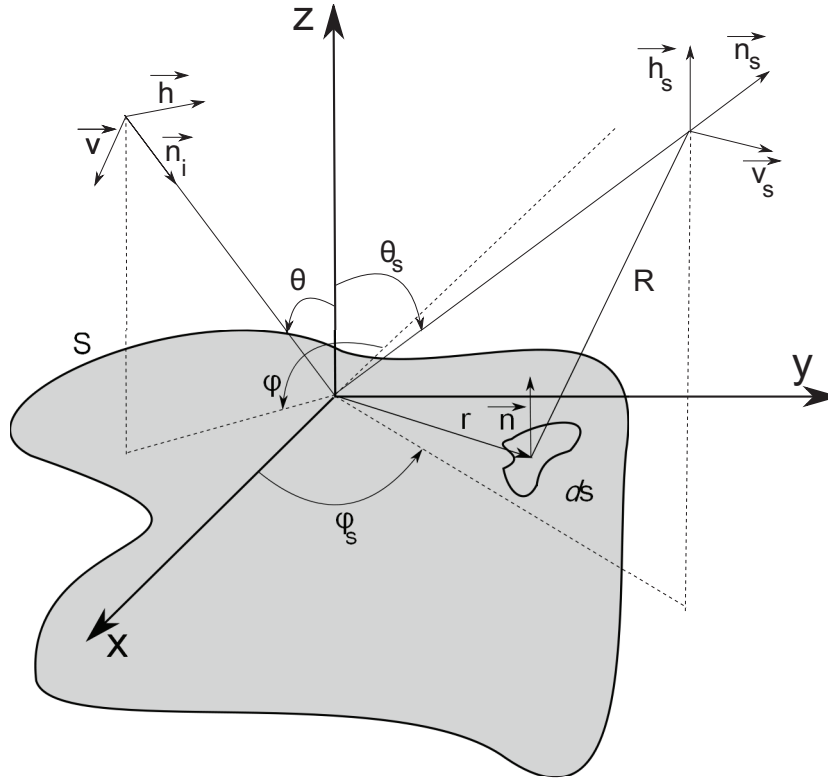


FIGURE E.2 – Schéma de l'approximation de Kirchhoff.

Les équations (E.8) étant indépendantes de la variable d'intégration, le champ diffusé devient :

$$\mathbf{E}_{pq}^s = K \mathbf{n}_s \wedge [\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} - \eta \mathbf{n}_s \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{H})] \int \exp(jQ) ds \quad (\text{E.17})$$

Ulabay *et al.* [218] définissent le champ diffusé par :

$$E_{pq}^s = k I E_0 U_{pq} \quad (\text{E.18})$$



Ce modèle n'est valable que pour des rayons de courbure grands devant la longueur d'onde. Ces conditions se résument alors dans le cas Gaussien [115] par :

$$kL > \frac{\sqrt{10}}{|\cos \theta + \cos \theta_s|} \quad (\text{E.19})$$

$$kL > 6 \quad (\text{E.20})$$

$$R_c > \lambda \quad (\text{E.21})$$

En raisonnant en terme de coefficient de diffusion, on obtient pour expression :

$$\sigma_{pq}^s = \frac{\pi k^2 q^2}{q_z^2} |U_{pq}|^2 P(Z_x, Z_y) \quad (\text{E.22})$$

Les quantités  $U_{pq}$  dépendent de la géométrie et sont détaillées en annexe.

Nous détaillons sans démonstration les quantités  $U_{pq}$  permettant de calculer les coefficients de diffusion dans l'approximation de Kirchhoff. Les coefficients de Fresnel dépendent de l'angle  $\theta_l$ , correspondant à l'angle local et nous obtenons :

$$R_1 = \frac{\epsilon_r \cos(\theta_l) - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2(\theta_l)}}{\epsilon_r \cos(\theta_l) + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2(\theta_l)}}, \quad R_2 = \frac{\cos(\theta_l) - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2(\theta_l)}}{\cos(\theta_l) + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2(\theta_l)}} \quad (\text{E.23})$$

avec :

$$\cos(\theta_l) = \sqrt{\frac{1 - \sin(\theta_i) \sin(\theta_s) \cos(\phi_i - \phi_s) + \cos(\theta_i) \cos(\theta_s)}{2}} \quad (\text{E.24})$$

On définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin(\theta_i) \cos(\theta_s) \cos(\phi_s - \phi) + \cos(\theta_i) \sin(\theta_s) \\ a_2 &= -[\cos(\theta_i) \sin(\theta_s) \cos(\phi_s - \phi) + \sin(\theta_i) \cos(\theta_s)] \\ a_3 &= -\sin(\theta_i) \sin(\phi_s - \phi_i) \\ a_4 &= \sin(\theta_s) \sin(\phi - \phi_s) \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Les coefficients de polarisation [113] sont définis par :

$$\begin{aligned} U_{hh} &= \frac{q \operatorname{sgn}(q_z) [R_1 a_3 a_4 + R_2 a_1 a_2]}{[a_3^2 + a_1^2] k} \\ U_{hv} &= \frac{q \operatorname{sgn}(q_z) [R_1 a_3 a_2 - R_2 a_1 a_4]}{[a_3^2 + a_1^2] k} \\ U_{vv} &= \frac{q \operatorname{sgn}(q_z) [R_1 a_1 a_2 + R_2 a_3 a_4]}{[a_3^2 + a_1^2] k} \\ U_{hh} &= \frac{q \operatorname{sgn}(q_z) [R_1 a_1 a_4 - R_2 a_3 a_2]}{[a_3^2 + a_1^2] k} \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

## E.2 Méthode des petites perturbations

Nous exposons l'expression des coefficients de polarisation [113]  $\alpha_{pq}$  présents dans le calcul des coefficients de diffusion pour la méthode des petites perturbations. Les quantités  $\alpha_{pq}$  dépendent de :

$$a_1 = \sqrt{\epsilon_r \mu + \sin^2(\theta_i)}, \quad a_2 = \sqrt{\epsilon_r \mu + \sin^2(\theta_s)} \quad (\text{E.27})$$

L'expression du coefficient de diffusion pour la polarisation vv est donnée par :

$$n_1^{vv} = (\epsilon_r - 1)(\epsilon_r \sin(\theta_i) \sin(\theta_s) - a_1 a_2 \cos(\phi_s)) \quad (\text{E.28})$$

$$n_2^{vv} = \epsilon_r^2 (\mu - 1) \cos(\phi_s) \quad (\text{E.29})$$

$$d_1^{vv} = \epsilon_r \cos(\theta_i) + a_1 \quad (\text{E.30})$$

$$d_2^{vv} = \epsilon_r \cos(\theta_s) + a_2 \quad (\text{E.31})$$

$$\alpha_{vv} = \frac{n_1^{vv} + n_2^{vv}}{d_1^{vv} d_2^{vv}} \quad (\text{E.32})$$

Le coefficient de diffusion pour la polarisation vh a pour expression :

$$n_1^{vh} = (\mu - 1)\epsilon_r a_1 \quad (\text{E.33})$$

$$n_2^{vh} = (\epsilon_r - 1)\mu a_2 \quad (\text{E.34})$$

$$d_1^{vh} = \mu \cos(\theta_i) + a_1 \quad (\text{E.35})$$

$$d_2^{vh} = \epsilon \cos(\theta_s) + a_2 \quad (\text{E.36})$$

$$\alpha_{vh} = \frac{n_1^{vh} + n_2^{vh}}{d_1^{vh} d_2^{vh}} \sin(\phi_s) \quad (\text{E.37})$$

Pour la polarisation hv, le coefficient de diffusion est égal à :

$$n_1^{hv} = (\epsilon - 1)\mu a_1 \quad (\text{E.38})$$

$$n_2^{hv} = (\mu - 1)\epsilon a_2 \quad (\text{E.39})$$

$$d_1^{hv} = \epsilon \cos(\theta_i) + a_1 \quad (\text{E.40})$$

$$d_2^{hv} = \mu \cos(\theta_s) + a_2 \quad (\text{E.41})$$

$$\alpha_{hv} = \frac{n_1^{hv} + n_2^{hv}}{d_1^{hv} d_2^{hv}} \sin(\phi_s) \quad (\text{E.42})$$

Enfin, l'expression du coefficient de diffusion pour la polarisation hh vaut :

$$n_1^{hh} = (\mu - 1)(a_1 a_2 \cos(\phi_s) - \mu \sin(\theta_i) \sin(\theta_s)) \quad (\text{E.43})$$

$$n_2^{hh} = \mu^2(\epsilon - 1) \cos(\phi_s) \quad (\text{E.44})$$

$$d_1^{hh} = \mu \cos(\theta_i) + a_1 \quad (\text{E.45})$$

$$d_2^{hh} = \mu \cos(\theta_s) + a_2 \quad (\text{E.46})$$

$$\alpha_{hh} = -\frac{n_1^{hh} + n_2^{hh}}{d_1^{hh} d_2^{hh}} \quad (\text{E.47})$$



# Production scientifique

## Conférences internationales avec actes

**A. Fiche**, A. Khenchaf, J.C. Cexus, M. Rochdi and A. Martin. RCS characterization of sea clutter by using the  $\alpha$ -stable distributions. *RADAR (Glasgow, United-Kingdom)*, 22-25 October 2012.

**A. Fiche**, A. Khenchaf, J.C. Cexus, M. Rochdi and A. Martin. Characterization of EM clutter with  $\alpha$ -stable distributions. *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (Munich, Germany)*, 22-27 July 2012.

**A. Fiche**, A. Martin, J.C. Cexus and A. Khenchaf. A comparison between a Bayesian approach and a method based on continuous belief functions for pattern recognition. *The 2<sup>nd</sup> International Conference on Belief Functions (Compiègne, France)*, 9-11 May 2012.

**A. Fiche**, A. Martin, J.C. Cexus and A. Khenchaf. Continuous belief functions and  $\alpha$ -stables belief functions. *The thirteenth International Conference on Information Fusion (Edinburgh, United-Kingdom)*, 26-27 July 2010, **Award : Honourable mention**.

P.E. Doré, **A. Fiche** and A. Martin. Models of belief functions - Impacts for pattern recognition. *The thirteenth International Conference on Information Fusion (Edinburgh, United-Kingdom)*, 26-27 July 2010.

## Conférences francophones avec actes

**A. Fiche**, A. Martin, J.C. Cexus et A. Khenchaf. Estimation d'un mélange de distributions  $\alpha$ -stables à partir de l'algorithme EM. *Actes des Rencontres sur la Logique Floue et ses Applications (Lannion, France)*, 18-19 Novembre 2010.

**A. Fiche** et A. Martin. Approche Bayésienne et fonctions de croyance continues pour la classification. *Actes des Rencontres sur la Logique Floue et ses Applications (Annecy, France)*, 5-6 Novembre 2009.

## Conférences francophones sans actes

**A. Fiche**, A. Martin, J.C. Cexus et A. Khenchaf. Influence de l'estimation des paramètres de texture pour la classification de données complexes. *8<sup>ème</sup> atelier sur la fouille de données complexes - complexité liée aux données multiples. Extraction et Gestion des Connaissances (Brest, France)*, 25-28 Janvier 2011.



# Bibliographie

- [1] Abramowitz, M. et Stegun, I.A. : *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover publications, 1964.
- [2] Achim, A., Bezerianos, A. et Tsakalides, P. : Novel Bayesian multiscale method for speckle removal in medical ultrasound images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(8):pp. 772–783, August 2001.
- [3] Achim, A., Tsakalides, P. et Bezerianos, A. : SAR image denoising via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modeling. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(8):pp. 1773–1784, August 2003.
- [4] Akgiray, V. et Lamoureux, C.G. : Estimation of stable-law parameters : A comparative study. *Journal of Business & Economic Statistics*, 7(1):pp. 85–93, January 1989.
- [5] Antipov, I. : Analysis of sea clutter data. Rapport technique, Department Science and Technology Organisation, March 1998.
- [6] Army., Coastal Engineering Research Center (U.S.) United States. : *Shore protection manual*, volume 1. Dept. of the Army, Waterways Experiment Station, Corps of Engineers, Coastal Engineering Research Center, Washington, DC, 1984.
- [7] Arnold-Bos, A. : *La surveillance maritime en imagerie radar bistatique : Théorie, simulation, contribution à la détection automatique du sillage des navires*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2010.
- [8] Arnold-Bos, A., Khenchaf, A. et Martin, A. : Bistatic radar imaging of the marine environment-part I : Theoretical background. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(11):pp 3372–3383, 2007.
- [9] Arnold-Bos, A., Khenchaf, A. et Martin, A. : Bistatic radar imaging of the marine environment-part II : Simulation and results analysis. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(11):pp 3384–3396, 2007.
- [10] Awada, A., Ayari, M.Y., Khenchaf, A. et Coatanhay, A. : Bistatic scattering from an anisotropic sea surface : Numerical comparison between the first-order SSA and the TSM models. *Waves in Random and Complex Media*, 16(3):pp 383–394, 2006.
- [11] Ayari, M.Y. : *Détection électromagnétique d'éléments polluants au dessus de la surface maritime*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, 2006.
- [12] Bachelier, L. : *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars, 1900.
- [13] Banerjee, A., Burlina, P. et Chellappa, R. : Adaptive target detection in foliage-penetrating SAR images using alpha-stable models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(12):pp. 1823–1831, December 1999.
- [14] Barakat, R. : Weak-scatterer generalization of the k-density function with application to laser scattering in atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 3(4):pp. 401–409, 1986.

- [15] Barrick, D. : Rough surface scattering based on the specular point theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 16(4):pp. 449–454, July 1968.
- [16] Beckmann, P. et Spizzichino, A. : *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Artech House, 1987.
- [17] Beer, T. : *Environmental oceanography*. CRC Press, 1997.
- [18] Bendali, A. : *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, Paris, France, 1984.
- [19] Bennani, Y., Comblet, F. et Khenchaf, A. : RCS of complex targets : Original representation validated by measurements-Application to ISAR imagery. *IEEE*, 16(3):pp 1–10, 2012.
- [20] Bergström, H. : On some expansions of stable distribution functions. *Arkiv för Matematik*, 2(4):pp. 375–378, 1952.
- [21] Bhattacharya, A. : On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 35(99-109):4, 1943.
- [22] Booyesen, A.J. : Aperture theory and the equivalence principle. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 3:pp. 29–40, 2003.
- [23] Born, M. et Wolf, E. : *Principles of optics*. Cambridge University Press, 7 édition, 1999.
- [24] Born, M., Wolf, E. et Bhatia, A.B. : *Principles of optics : Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] Boubchir, L. : *Approches bayésiennes pour le débruitage des images dans le domaine des transformées multi-échelles parcimonieuses orientées et non orientées*. Thèse de doctorat, Université de Caen, Caen, France, 2007.
- [26] Bouché, D. et Molinet, F. : *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer verlag, 1994.
- [27] Bourlier, C. : *Rayonnement infrarouge d'une surface stochastique - Application au domaine océanique*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes, France, 1999.
- [28] Breiman, L. : *Probability (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, April 1992.
- [29] Bretschneider, C.L. : The generation and decay of wind waves in deep water. *Transactions of the American Geophysical Union*, 33:pp. 381–389, 1952.
- [30] Briggs, J.N. : *Target detection by marine radar*. Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [31] Brorsen, B.W. et Yang, S.R. : Maximum likelihood estimates of symmetric stable distribution parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 19(4):pp. 1459–1464, 1990.
- [32] Brothers, K.M., DuMouchel, W.H. et Paulson, A.S. : *Fractiles of the stable laws*. Rapport technique, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 1983.
- [33] Brown, G. : Backscattering from a Gaussian-distributed perfectly conducting rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 26(3):pp. 472–482, 1978.
- [34] Buckley, J.J. et Hayashi, Y. : Fuzzy neural networks : A survey. *Fuzzy sets and systems*, 66(1):pp. 1–13, 1994.
- [35] Caron, F., Ristic, B., Duflos, E. et Vanheeghe, P. : Least committed basic belief density induced by a multivariate gaussian : Formulation with applications. *International Journal of Approximate Reasoning*, 48(2):419–436, 2008.

- 
- [36] Chambers, J.M., Mallows, C.L. et Stuck, B.W. : A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association*, 71:pp. 340–344, June 1976.
- [37] Chitre, M., Potter, J. et Heng, O.S. : Underwater acoustic channel characterisation for medium-range shallow water communications. *In Proceedings of the IEEE OCEANS Conference*, 2004.
- [38] Chivers, R.C., Emerson, N. et Burns, D.R. : New acoustic processing for underway surveying. *The Hydrographic Journal*, 56:pp. 9–17, 1990.
- [39] Cole, K.S. et Cole, R.H. : Dispersion and absorption in dielectrics I. alternating current characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 9(4):pp. 341–352, February 1941.
- [40] Cole, K.S. et Cole, R.H. : Dispersion and absorption in dielectrics II. direct current characteristics. *The Journal of Chemical Physics*, 10(2):pp. 98–105, 1942.
- [41] Coleman, T.F. et Li, Y. : An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimization*, 6:pp. 418–445, 1996.
- [42] Colladon, J.D. et Sturm, J.K.F. : Speed of sound in liquids. *Ann. Chim. Phys. Series 2, part IV*, 5:pp 236–257, 1827.
- [43] Cowper, M. : *Nonlinear processing of non-Gaussian stochastic and chaotic deterministic time series*. Thèse de doctorat, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland, 2000.
- [44] Cox, C. et Munk, W. : Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *Journal of Marine Research*, 13(2):pp. 198–227, 1954.
- [45] Cox, C. et Munk, W. : Slopes of the sea surface deduced from photographs of sun glitter. *Bulletin of the Scripps Institution of Oceanography*, 6(9):pp. 401–488, 1956.
- [46] Daba, J.S. et Bell, M.R. : Statistics of the scattering cross-section of a small number of random scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8):pp. 773–783, August 1995.
- [47] Darricau, J. : *Radars : Principes et éléments de base*. Technique de l'ingénieur, 1996.
- [48] De Moivre, A. : The doctrine of chances. 1738.
- [49] Debye, P.J.W. : *Polar molecules*. The Chemical Catalog Company, inc., 1929.
- [50] Dempster, A. : Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38(2):pp. 325–339, 1967.
- [51] Dempster, A.P., Laird, N.M. et Rubin, D.B. : Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages pp. 1–38, 1977.
- [52] Denny, W.M. : K-distributed sea clutter : performance predictions made easy. *In Radar'97, Edinburgh, Scotland*, pages pp. 209–213. IET, October 14-16 1997.
- [53] Denoeux, T. : A  $k$ -nearest neighbor classification rule based on Dempster-Shafer theory. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A : Systems and Humans*, 25(5):pp. 804–813, 1995.
- [54] Denoeux, T. : A neural network classifier based on Dempster-Shafer theory. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A : Systems and Humans*, 30(2):pp. 131–150, 2000.
- [55] Dong, Y. : Clutter spatial distribution and new approaches of parameter estimation for Weibull and  $k$ -distributions. Rapport technique, Department Science and Technology Organisation, 2004.
- [56] Doré, P.E. : *Caractérisation des fonctions de croyance continues*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 2011.
-



- [57] Doré, P.E., Fiche, A. et Martin, A. : Models of belief functions : Impacts for patterns recognitions. *In Conference on Information Fusion, Edinburgh, Scotland*, July 26-29 2010.
- [58] Doré, P.E., Martin, A. et Khenchaf, A. : Constructing consonant belief function induced by a multimodal probability. *In COGNitive systems with Interactive Sensors, Paris, France*, November 5-6 2009.
- [59] Dreyfus, G., Martinez, J.-M., Samuelides, M., Gordon, M.-B., Badran, F., Thiria, S. et Hérault, L. : *Réseaux de neurones, Méthodologie et applications*. Eyrolles, 2002.
- [60] Dubois, D. et Prade, H. : A set of theoretic view of belief functions. logical operations and approximations by fuzzy sets. *International Journal of General Systems*, 12(3):pp. 85–121, 1985.
- [61] Dubois, D. et Prade, H. : *Théorie des possibilités*. Masson, Novembre 1987.
- [62] Dubois, D. et Prade, H. : Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures. *Computational Intelligence*, 4(3):pp. 244–264, 1988.
- [63] DuBois, D. et Prade, H.M. : *Fuzzy sets and systems : theory and applications (Mathematics in Sciences & Engineering)*. Academic Press, 1980.
- [64] Duda, R.O. et Hart, P.E. : *Pattern classification and scene analysis*. Wiley, 1996.
- [65] DuMouchel, W.H. : *Stable distributions in Statistical inference*. Thèse de doctorat, Department of Statistics, Yale University, 1971.
- [66] DuMouchel, W.H. : On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. *The Annals of Statistics*, 1(5):pp. 948–957, 1973.
- [67] Dunnington, G.W., Gray, J. et Dohse, F.E. : *Carl Friedrich Gauss : Titan of science*. The Mathematical Association of America, 2004.
- [68] Eckart, C. : The scattering of sound from the sea surface. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25(3):pp. 566–570, 1953.
- [69] Elfouhaily, T., Chapron, B., Katsaros, K. et Vandemark, D. : A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *Journal of Geophysical Research*, 102(C7):pp. 781–796, 1997.
- [70] Elfouhaily, T.M. : *Modèle couple vent/vagues et son application à la télédétection par micro-onde de la surface de la mer*. Thèse de doctorat, Université de Paris XII, Paris, France, 1996.
- [71] Embrechts, P., Klüppelberg, C. et Mikosch, T. : *Modelling extreme events : For Insurance and Finance*. Springer, 1997.
- [72] Fama, E.F. : The behavior of stock-market prices. *Journal of business*, 38(1):pp. 34–105, 1965.
- [73] Fama, E.F. et Roll, R. : Parameter estimates for symmetric stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 66(334):pp. 331–338, 1971.
- [74] Farina, A., Russo, A., Scannapieco, F. et Barbarossa, S. : Theory of radar detection in coherent Weibull clutter. *IEEE Proceedings F, Communications, Radar and Signal Processing*, 134(2):pp. 174–190, 1987.
- [75] Fay, F.A., Clarke, J. et Peters, R.S. : Weibull distribution applied to sea clutter. *In Radar'77, London, England*, pages pp. 101–104, 1977.
- [76] Feller, W. : *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley-India, 2009.

- 
- [77] Fiche, A., Cexus, J.-C., Khenchaf, A., Rochdi, M. et Martin, A. : RCS characterization of sea clutter by using the  $\alpha$ -stable distributions. In *RADAR, Glasgow, United-Kingdom*, October 22-25 2012.
- [78] Fiche, A., Cexus, J.-C., Khenchaf, A., Rochdi, M. et Martin, A. : Characterization of EM sea clutter with alpha-stable distribution. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Munich, Germany*, July 22-27 2012.
- [79] Fiche, A., Cexus, J.-C., Martin, A. et Khenchaf, A. : Influence de l'estimation des paramètres pour la classification de données complexes. In *Atelier Fouille de Données Complexes, Extraction et Gestion de Connaissances, Brest, France*, January 25-28 2011.
- [80] Fiche, A. et Martin, A. : Approche Bayésienne et fonctions de croyance continues pour la classification. In *Rencontre francophone sur la Logique Floue et ses Applications, Annecy, France*, November 5-6 2009.
- [81] Fiche, A., Martin, A., Cexus, J.-C. et Khenchaf, A. : A comparison between a bayesian approach and a method based on continuous belief functions for pattern recognition. In *International Conference on Belief Functions, Compiègne, France*, May 8-10 2012.
- [82] Fiche, A., Martin, A., Cexus, J.C. et Khenchaf, A. : Estimation d'un mélange de distributions  $\alpha$ -stables à partir de l'algorithme EM. In *Rencontre francophone sur la Logique Floue et ses Applications, Lannion, France*, November 18-19 2010.
- [83] Fiche, A., Martin, A., Cexus, J.C. et Khenchaf, A. : Continuous belief functions and  $\alpha$ -stable distributions. In *International Conference on Information Fusion, Edinburgh, United-Kingdom*, July 26-29 2010.
- [84] Fung, A. et Lee, K. : A semi-empirical sea-spectrum model for scattering coefficient estimation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 7(4):pp. 166–176, 1982.
- [85] Gauss, C.F. : *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. 1809.
- [86] Georgiadis, A.T. : *Adaptive Equalisation for Impulsive Noise Environments*. Thèse de doctorat, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland, 2001.
- [87] Goldberg, D.E. : *Genetic Algorithms in Search and Optimization*. Addison-wesley, 1989.
- [88] Gonzalez, J.G. : *Robust techniques for wireless communications in non-Gaussian environments*. Thèse de doctorat, University of Delaware Newark, DE, USA, 1997.
- [89] Gordon, W. : Far-field approximations to the Kirchhoff-Helmholtz representations of scattered fields. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 23(4):pp. 590–592, 1975.
- [90] Granger, C.W.J. et Orr, D. : " Infinite Variance" and Research Strategy in Time Series Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 67(338):pp. 275–285, June 1972.
- [91] Guilcher, A. : *Précis d'hydrologie marine et continentale*. Masson, 2 édition, 1979.
- [92] Guyon, E., Hulin, J.P. et Petit, L. : *Hydrodynamique physique*. EDP sciences, 2001.
- [93] Hair, T., Lee, T. et Baker, C.J. : Statistical properties of multifrequency high-range-resolution sea reflections. *IEE Proceedings of Radar and Signal Processing*, 138(2):pp. 75–79, 1991.
- [94] Hamilton, L.J., Mulhearn, P.J. et Poeckert, R. : Comparison of RoxAnn and QTC-View acoustic bottom classification system performance for the Cairns area, great barrier reef, Australia. *Continental Shelf Research*, 19(12):pp. 1577–1597, 1999.
- [95] Haralick, R.M. : Statistical and structural approaches to texture. *Proceedings of the IEEE*, 67(5):pp. 786–804, 1979.
-

- [96] Haralick, R.M., Shanmugam, K. et Dinstein, I.H. : Textural features for image classification. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 3(6):pp. 610–621, 1973.
- [97] Harrington, R.F. : *Time-Harmonic Fields*. New York : McGraw-Hill, 1961.
- [98] Harrington, R.F. : *Field computation by moment methods*. Wiley-IEEE Press, April 1993.
- [99] Hasselmann, D.E., Dunckel, M. et Ewing, J.A. : Directional wave spectra observed during JONSWAP 1973. *Journal of Physical Oceanography*, 10(8):pp. 1264–1280, 1980.
- [100] Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D.E., Enke, K., Ewing, J.A., Gienapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Meerburg, A., Müller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W. et Walden, H. : Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Deutsches Hydrographisches Institut*, 8(12), 1973.
- [101] Holt, D.R. et Crow, E.L. : Tables and graphs of the stable probability density functions. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 77B(3 & 4):143, 1973.
- [102] Holtsmark, J. : über die verbreiterung von spektrallinien. *Annalen der Physik*, 363(7):pp. 577–630, 1919.
- [103] Hopfield, J.J. : Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, 79(8):pp. 2554–2558, 1982.
- [104] Ishimaru, A. : *Wave propagation and scattering in random media*, volume 2. Academic Press, 1978.
- [105] Jakeman, E. et Pusey, P. : A model for non-rayleigh sea echo. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 24(6):pp. 806–814, November 1976.
- [106] Jakeman, E. et Pusey, P.N. : Statistics of non-rayleigh microwave sea echo. In *Radar'77, London, England*, pages pp. 105–109, 1977.
- [107] Janicki, A. et Weron, A. : *Simulation and chaotic behavior of  $\alpha$ -stable stochastic processes*. Marcel Dekker, 1994.
- [108] Johnson, J.T. : Third-order small-perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces. *Journal of the Optical Society of America A*, 16(11):pp. 2720–2736, 1999.
- [109] Kanter, M. : Stable densities under change of scale and total variation inequalities. *The Annals of Probability*, 3(4):pp. 697–707, 1975.
- [110] Karoui, I. : *Segmentation par méthodes markoviennes et variationnelles des images texturées : application à la caractérisation sonar des fonds marins*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2007.
- [111] Keller, J.B. : Geometrical theory of diffraction. *Journal of the Optical Society of America*, 52(2):pp. 116–130, 1962.
- [112] Keller, J.M., Gray, M.R. et Givens, J.A. : A fuzzy  $k$ -nearest neighbor algorithm. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(4):pp. 580–585, 1985.
- [113] Khenchaf, A. : Modélisation électromagnétique, radar bistatique et traitement de l'information. *HDR, Ecole STIM, Nantes, École polytechnique de l'université de Nantes*, 2000.
- [114] Khenchaf, A. : Bistatic scattering and depolarization by randomly rough surfaces : Application to the natural rough surfaces in X-band. *Waves in random media*, 11(2):pp. 61–89, 2001.
- [115] Khenchaf, A., Daout, F. et J., Saillard : Bistatic polarized scattering by rough surfaces. In *Proceedings of the third International workshop on radar polarimetry, Nantes France*, 1995.

- 
- [116] Kidmose, P. : *Blind separation of heavy tail signals*. Thèse de doctorat, Department of Informatics and Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 2001.
- [117] Kil, D.H. et Shin, F.B. : *Pattern recognition and prediction with applications to signal characterization*. American Institute of Physics, 1996.
- [118] Kinsman, B. : *Wind waves : their generation and propagation on the ocean surface*. Dover Publications, 1965.
- [119] Knott, E.F., Shaeffer, J.F. et Tuley, M.T. : *Radar cross section*. Artech House, 2004.
- [120] Kohonen, T. : Self-organized formation of topologically correct feature maps. *Biological cybernetics*, 43(1):pp. 59–69, 1982.
- [121] Kong, J.A. : *Electromagnetic wave theory*. John Wiley and Sons Ltd ; International Ed edition, 1987.
- [122] Kotz, S., Johnson, N.L. et Balakrishnan, N. : *Continuous multivariate distributions : models and applications*, volume 1. Wiley-Interscience, 2 édition, 2000.
- [123] Koutrouvelis, I.A. : Regression-type estimation of the parameters of stable laws. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372):pp. 918–928, December 1980.
- [124] Koutrouvelis, I.A. : An iterative procedure for the estimation of the parameters of stable laws. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 10(1):pp. 17–28, 1981.
- [125] Kouyoumjian, R.G. et Pathak, P.H. : A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *IEEE Proceedings*, 62(11):pp. 1448–1461, 1974.
- [126] Kullback, S. et Leibler, R.A. : On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):pp. 79–86, 1951.
- [127] Kuruoglu, E.E. : *Signal Processing in alpha-stable Noise Environments : A Least Lp-norm Approach*. Thèse de doctorat, University of Cambridge, 1998.
- [128] Kuruoglu, E.E. et Zerubia, J. : Skewed  $\alpha$ -stable distributions for modelling textures. *Pattern recognition letters*, 24(1-3):pp. 339–348, January 2003.
- [129] Laanaya, H. : *Classification en environnement incertain : application à la caractérisation de sédiments marins*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2007.
- [130] Le Cam, L.M. et Yang, G.L. : *Asymptotics in statistics : some basic concepts*. Springer Verlag, 2 édition, 2000.
- [131] Le Chenadec, G. : *Analyse de descripteurs énergétiques et statistiques de signaux sonar pour la caractérisation des fonds marins*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, 2004.
- [132] Leblond, I. : *Recalage à long terme d'images sonar par mise en correspondance de cartes de classification automatique des fonds*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 2006.
- [133] Leblond, I., Legris, M. et Solaiman, B. : Use of classification and segmentation of sidescan sonar images for long term registration. In *Oceans'05, Brest, France*, volume 1, pages pp. 322–327, June 20-23 2005.
- [134] Lengua, G.A. : Modeling of forward scattering. Rapport technique, Naval Ocean System Center, 1991.
- [135] Levenberg, K. : A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2:pp. 164–168, 1944.
- [136] Liao, M., Wang, C., Wang, Y. et Jiang, L. : Using SAR images to detect ships from sea clutter. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(2):pp. 194–198, 2008.
-

- [137] Liu, S. : *Lois stables et processus ponctuels : liens et estimation des paramètres*. Thèse de doctorat, Université Lille1, Lille, France, 2009.
- [138] Longuet-Higgins, M.S. : On the statistical distributions of sea waves. *Journal of Marine Research*, 11(3):pp. 245–265, 1952.
- [139] Lurton, T. : *Modélisation et simulation de l'interaction entre onde électromagnétique et surfaces de mer*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France, 2010.
- [140] Lurton, X. : *Acoustique sous-marine*. Editions Ifremer, 1998.
- [141] Lévy, P. : Théorie des erreurs : La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52:pp. 49–85, 1924.
- [142] Mandelbrot, B. : The variation of certain speculative prices. *Journal of business*, 36(4):pp. 394–419, 1963.
- [143] Marquardt, D.W. : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2):pp. 431–441, June 1963.
- [144] Martin, A. : Fusion d'informations haut niveau : Application à la classification d'images sonar. *Atelier Fouille de données complexes-Extraction et gestion de connaissance (EGC)*, Paris, France, 2005.
- [145] Massey Jr, F.J. : The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253):pp. 68–78, 1951.
- [146] Mastin, G.A., Watterberg, P.A. et Mareda, J.F. : Fourier synthesis of ocean scenes. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 7(3):pp. 16–23, March 1987.
- [147] Matsui, M. et Takemura, A. : Some improvements in numerical evaluation of symmetric stable density and its derivatives. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 35:pp. 149–172, 2006.
- [148] Maxwell, J.C. : V. illustrations of the dynamical theory of gases part I. on the motions and collisions of perfectly elastic spheres. *Philosophical Magazine Series 4*, 19(124):pp. 19–32, 1860.
- [149] McCulloch, J.H. : Simple consistent estimators of stable distribution parameters. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(4):pp. 1109–1136, 1986.
- [150] McCulloch, J.H. : Estimation of bivariate stable spectral densities. *Unpublished manuscript, Department of Economics, Ohio State University*, 1994.
- [151] McCulloch, W.S. et Pitts, W. : A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of mathematical biology*, 5(4):pp. 115–133, 1943.
- [152] McDaniel, S.T. : A small-slope theory of rough surface scattering. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(4):pp. 1858–1864, 1994.
- [153] Michaeli, A. : Elimination of infinities in equivalent edge current-Part I : Fringe current components. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(7):pp. 912–918, 1986.
- [154] Michaeli, A. : Elimination of infinities in equivalent edge current-Part II : Physical current components. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(8):pp. 1034–1037, 1986.
- [155] Michaeli, A. : Incremental diffraction coefficients for the extended physical theory of diffraction. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(7):732–734, 1995.
- [156] Mitsuyasu, H., Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkuso, M., Honda, T. et Rindiishi, K. : Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy. *Journal of Physical Oceanography*, 5:pp. 750–760, 1975.



- 
- [157] Modarres, R. et Nolan, J.P. : A method for simulating stable random vectors. *Computational Statistics*, 9(1):pp. 11–19, 1994.
  - [158] Morchin, W.C. : *Radar engineer's sourcebook*. Artech House, 1993.
  - [159] Neumann, G. : On ocean wave spectra and a new method of forecasting wind-generated sea. Rapport technique 43, University of California Libraries, 1952.
  - [160] Nikias, C.L. et Shao, M. : *Signal processing with alpha-stable distributions and applications*. Wiley-Interscience, 1 édition, 1995.
  - [161] Nohara, T.J., Haykin, S., Currie, B.W. et Krasnor, C. : Towards the improved detection of small ice targets in  $k$ -distributed sea clutter. In *Proceedings of the 1989 international symposium on noise and clutter rejection in radars and imaging sensors*, pages pp. 66–71, 1989.
  - [162] Nolan, J.P. : Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 13(4):pp. 759–774, 1997.
  - [163] Nolan, J.P. : *Multivariate stable distributions : Approximation, estimation, simulation and identification*. Birkhäuser, 1998.
  - [164] Nolan, J.P. : Bibliography on stable distributions, processes and related topics. 2010.
  - [165] Nolan, J.P. : *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Birkhauser, Boston, 2012. In progress, Chapter 1 online at [academic2.american.edu/~jpnolan](http://academic2.american.edu/~jpnolan).
  - [166] Nolan, J.P., Panorska, A.K. et McCulloch, J.H. : Estimation of stable spectral measures. *Mathematical and Computer Modelling*, 34(9):pp. 1113–1122, 2001.
  - [167] Nolan, J.P. et Rajput, B. : Calculation of multidimensional stable densities. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 24(3):pp. 551–566, 1995.
  - [168] Osswald, C. et Martin, A. : Understanding the large family of dempster-shafer theory's fusion operators-a decision-based measure. In *Conference on Information Fusion, Florence, Italy*. IEEE, July 10-13 2006.
  - [169] Panton, D.B. : Cumulative distribution function values for symmetric standardized stable distributions. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 21(2):pp. 485–492, 1992.
  - [170] Paulson, A.S. et Delehanty, T.A. : Tables of the fractiles of the stable law. Rapport technique, Rennselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 1993.
  - [171] Paulson, A.S., Holcomb, E.W. et Leitch, R.A. : The estimation of the parameters of the stable laws. *Biometrika*, 62(1):pp. 163–170, 1975.
  - [172] Pearson, K. : On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine, Series 5*, 50(302):pp. 157–175.
  - [173] Phillips, O.M. : The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:pp. 426–434, February 1958.
  - [174] Phillips, O.M. : *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge university press, 2 édition, 1977.
  - [175] Pierce, R.D. : RCS characterization using the alpha-stable distribution. In *Radar'96, Ann Arbor, United-States*, pages pp. 154–159. IEEE, May 13-16 1996.
  - [176] Pierson, W.J. et Moskowitz, L. : A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of SA Kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research*, 69(24):pp. 5181–5190, 1964.
-

- [177] Pongsilamane, P. et Bertoni, H.L. : Specular and nonspecular scattering from building facades. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 52(7):pp. 1879–1889, 2004.
- [178] Pouliquen, E. et Lurton, X. : Seabed identification using echo-sounder signals. In *European Conference on Underwater Acoustics, Luxembourg*, pages pp. 535–539, September 14-18 1992.
- [179] Prager, B.T., Caughey, D.A. et Poeckert, R.H. : Bottom classification : operational results from QTC-View. In *OCEANS'95, San Diego, United-States*, volume 3, pages pp. 1827–1835, October 9-12 1995.
- [180] Press, S.J. : A compound events model for security prices. *Journal of Business*, 40(3):pp. 317–335, 1967.
- [181] Press, S.J. : *Applied multivariate analysis*. Holt, Rinehart and Winston, 1972.
- [182] Press, S.J. : Estimation in univariate and multivariate stable distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340):pp. 842–846, 1972.
- [183] Rice, S.O. : Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Communications on pure and applied mathematics*, 4(2-3):pp. 352–378, 1951.
- [184] Ristic, B., Gordon, N. et Bessell, A. : On target classification using kinematic data. *Information Fusion*, 5(1):pp. 15–21, 2004.
- [185] Ristic, B. et Smets, Ph. : Belief function theory on the continuous space with an application to model based classification. In *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU*, pages pp. 1119–1126, 2004.
- [186] Ristic, B. et Smets, Ph. : Target classification approach based on the belief function theory. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 41(2):pp. 574–583, April 2005.
- [187] Rochdi, M. : *Signature électromagnétique bistatique d'une cible complexe placée sur une surface maritime rugueuse. Modélisation, simulation et expérimentation*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 2011.
- [188] Rominger, C., Martin, A., Khenchaf, A. et Laanaya, H. : Sonar image registration based on conflict from the theory of belief functions. In *Conference on Information Fusion, Seattle, United-States*, July 6-9 2009.
- [189] Rosenblatt, F. : The perceptron, a perceiving and recognizing automaton (project para). Rapport technique 85-460-1, Cornell Aeronautical Laboratory, 1957.
- [190] Ruck, G.T., Barrick, D.E., Stuart, W.D. et Krichbaum, C.K. : *Radar cross section handbook*, volume 1. Plenum Press New York, 1970.
- [191] Sahmoudi, M. : *Processus alpha-stables pour la séparation et l'estimation robustes des signaux non-gaussiens et/ou non-stationnaires*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI Orsay, Paris, France, 2004.
- [192] Saporta, G. : *Probabilités, analyse des données et statistique*. Editions Technip, 2 édition, 2006.
- [193] Saucier, W.J. : *Principles of meteorological analysis*. Dover Phoenix Editions, 2003.
- [194] Schelkunoff, S.A. : On diffraction and radiation of electromagnetic waves. *Physical Review*, 56:pp. 308–316, 1939.
- [195] Schleher, D.C. : Radar detection in Weibull clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-12(6):pp. 736–743, 1976.
- [196] Sekine, M. et Mao, Y. : *Weibull radar clutter*. Institution of Electrical Engineers Series 3, 1990.

- 
- [197] Shafer, G. : *A mathematical theory of evidence*. Princeton university press Princeton, NJ, 1976.
- [198] Shore, R.A. et Yaghjian, A.D. : Incremental diffraction coefficients for planar surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 36(1):pp. 55–70, 1988.
- [199] Silver, S. : *Microwave antenna theory and design*. The Institution of Engineering and Technology, 1941.
- [200] Smets, Ph. : The combination of evidence in the transferable belief model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(5):pp. 447–458, 1990.
- [201] Smets, Ph. : Belief functions : The disjunctive rule of combination and the generalized Bayesian theorem. *International Journal of Approximate Reasoning*, 9(1):pp. 1–35, August 1993.
- [202] Smets, Ph. : Belief functions on real numbers. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40(3):pp. 181–223, November 2005.
- [203] Smets, Ph. : Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty. *In Conference on Uncertainty in artificial intelligence, Cambridge, United-States*, pages pp. 29–40, August 27–29 1990.
- [204] Smets, Ph. et Kennes, R. : The transferable belief model. *Artificial intelligence*, 66(2):pp. 191–234, 1994.
- [205] Song, T. et Qi-zhong, L. : Facet noise in RCS prediction. *In International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, Beijing, China*, pages pp. 433–436, 28 October–1 November 2003.
- [206] Spiga, P. : *Diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses en incidence rasante*. Thèse de doctorat, Université du Sud-Toulon-Var, Toulon, France, 2008.
- [207] Stigler, S.M. : *The history of statistics : The measurement of uncertainty before 1900*. Belknap Press, March 1990.
- [208] Stogryn, A. : Electromagnetic scattering from rough, finitely conducting surfaces. *Radio Science*, 2:pp. 415–428, 1967.
- [209] Strat, T.M. : Continuous belief functions for evidential reasoning. *In National Conference on Artificial Intelligence, Austin, United-States*, August 6–10 1984.
- [210] Stratton, J.A. et Chu, L.J. : Diffraction theory of electromagnetic waves. *Physical Review*, 56(1):pp. 99–107, 1939.
- [211] Stuck, B.M. et Kleiner, B. : A statistical analysis of telephone noise. *Bell System Technical Journal*, 53(7):pp. 1263–1320, September 1974.
- [212] Sverdrup, H.U. et Munk, W.H. : *Wind, sea, and swell : theory of relations for forecasting*. Washington, D.C. : Hydrographic Office : For sale by the Hydrographic Office and the Supt. of Docs., 1947.
- [213] Taqqu, M.S. et Samorodnisky, G. : *Stable non-Gaussian random processes*. Chapman and Hall, 1 édition, 1994.
- [214] Thorsos, E.I. : The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(1):pp. 78–92, 1988.
- [215] Trunk, G.V. et George, S.F. : Detection of targets in non-Gaussian sea clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-6(5):pp. 620–628, September 1970.
- [216] Uchaikin, V.V. et Zolotarev, V.M. : *Chance and Stability : Stable Distributions and their applications*. V.S.P. Intl Science, August 1999.
-



- [217] Ufimtsev, P.Y. : *Fundamentals of the physical theory of diffraction*. Wiley Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
- [218] Ulaby, F.T., Moore, R.K. et Fung, A.K. : *Microwave remote sensing : Active and passive. Radar remote sensing and surface scattering and emission theory*, volume 2. Artech House Publishers, 1986.
- [219] Valenzuela, G.R. et Laing, M.B. : On the statistics of sea clutter. Rapport technique, NRL Report 7349, 1971.
- [220] Vapnik, V. : *Statistical learning theory*. Wiley, New York, 1998.
- [221] Voronovich, A.G. : Small-slope approximation in wave scattering by rough surfaces. *Soviet Physics, JETP*, 62(1):pp. 65–70, 1985.
- [222] Voronovich, A.G. : *Wave scattering from rough surfaces*. Springer, 2 édition, 1999.
- [223] Walley, P. : *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall London, 1991.
- [224] Wang, C., Liao, M., Li, X., Jiang, L. et Chen, X. : Ship detection algorithm in SAR images based on alpha-stable model. *Sensors*, 8:pp. 4948–4960, 2008.
- [225] Ward, K.D., Baker, C.J. et Watts, S. : Maritime surveillance radar. I. Radar scattering from the ocean surface. *IEE Proceedings F, Radar and Signal Processing*, 137(2):pp. 51–62, April 1990.
- [226] Ward, K.D. et Watts, S. : Radar sea clutter. *Microwave Journal*, 28(6):pp. 109–121, 1985.
- [227] Ward, K.D., Watts, S. et Tough, R.J.A. : *Sea clutter : Scattering, the K-distribution and radar performance*. Institution for Engineering and Technology, sonar and Navigations Series 20, 2006.
- [228] Watters, J.K.A. : *Distribution of height in ocean waves*. New Zealand Oceanographic Committee, 1953.
- [229] Weibull, W. : *The phenomenon of rupture in solids*. Generalstabens Litografiska Anst., 1939.
- [230] Weron, R. : Performance of the estimators of stable law parameters. Rapport technique HSC/95/01, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, 1995.
- [231] Williams, D.P. : Bayesian data fusion of multiview synthetic aperture sonar imagery for seabed classification. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(6):pp. 1239–1254, June 2009.
- [232] Worsdale, G.J. : Tables of cumulative distribution functions for symmetric stable distributions. *Applied Statistics*, 24(1):pp. 123–131, 1975.
- [233] Yager, R.R. : On the Dempster-Shafer framework and new combination rules. *Information sciences*, 41(2):pp. 93–137, March 1987.
- [234] Yamazato, M. : Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class I. *The Annals of Probability*, 6(4):pp. 523–531, 1978.
- [235] Zadeh, L.A. : Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 100(1):pp. 9–34, 1978.
- [236] Zolotarev, V.M. : *One-dimensional stable distributions (Translations of Mathematical Monographs)*, volume 65. American Mathematical Society, June 1986.



## **Distributions $\alpha$ -stables pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placés dans un environnement maritime**

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse a pour but de caractériser des signaux aléatoires, rencontrés dans le domaine aérien et sous-marin, en s'appuyant sur une approche statistique. En traitement du signal, l'analyse statistique a longtemps été fondée sous l'hypothèse de Gaussianité des données. Cependant, ce modèle n'est plus valide dès lors que la densité de probabilité des données se caractérise par des phénomènes de queues lourdes et d'asymétrie. Une famille de lois est particulièrement adaptée pour représenter de tels phénomènes : les distributions  $\alpha$ -stables.

**Dans un premier temps**, les distributions  $\alpha$ -stables ont été présentées et utilisées pour estimer des données synthétiques et réelles, issues d'un sondeur monofaisceau, dans une stratégie de classification de fonds marins. La classification est réalisée à partir de la théorie des fonctions de croyance, permettant ainsi de prendre en compte l'imprécision et l'incertitude liées aux données et à l'estimation de celles-ci. Les résultats obtenus ont été comparés à un classifieur Bayésien.

**Dans un second temps**, dans le contexte de la surveillance maritime, une approche statistique à partir des distributions  $\alpha$ -stables a été réalisée afin de caractériser les échos indésirables réfléchis par la surface maritime, appelés aussi fouillis de mer, où la surface est observée en configuration bistatique. La surface maritime a d'abord été générée à partir du spectre d'Elfouhaily puis la Surface Équivalente Radar (SER) de celle-ci a été déterminée à partir de l'Optique Physique (OP). Les distributions de Weibull et  $\mathcal{K}$  ont été utilisées et comparées au modèle  $\alpha$ -stable. La validité de chaque modèle a été étudiée à partir d'un test de Kolmogorov-Smirnov.

**Mots-clefs** : signaux aléatoires, modèle statistique, domaine maritime, distributions  $\alpha$ -stables, théorie des fonctions de croyance, fouillis de mer, spectre d'Elfouhaily, Surface Équivalente Radar (SER).

---

## **$\alpha$ -stable distributions for the characterization of random phenomena observed by sensors in a marine environment**

The purpose of this thesis is to characterize random signals, observed in air and underwater context, by using a statistical approach. In signal processing, the hypothesis of Gaussian model is often used for a statistical study. However, the Gaussian model is not valid when the probability density function of data are characterized by heavy-tailed and skewness phenomena. A family of laws can fit these phenomena: the  $\alpha$ -stable distributions.

**Firstly**, the  $\alpha$ -stable distribution have been used to estimate generated and real data, extracted from a mono-beam echo-sounder, for seabed sediments classification. The classification is made by using the theory of belief functions, which can take into account the imprecision and uncertainty of data and theirs estimations. The results have been compared to a Bayesian approach.

**Secondly**, in a context a marine surveillance, a statistical study from the  $\alpha$ -stable distribution has been made to characterize undesirable echo reflected by a sea surface, called sea clutter, where the sea surface is considered in a bistatic configuration. The sea surface has been firstly generated by the Elfouhaily sea spectrum and the Radar Cross Section (RCS) of the sea surface has been computed by the Physical Optics (PO). The Weibull and  $\mathcal{K}$  distributions have been used and the results compared to the  $\alpha$ -stable model. The validity of each model has been evaluated by a Kolmogorov-Smirnov test.

**Keywords** : random signals, statistical model, marine environment,  $\alpha$ -stable distribution, theory of belief functions, sea clutter, Elfouhaily sea spectrum, Radar Cross Section (RCS).